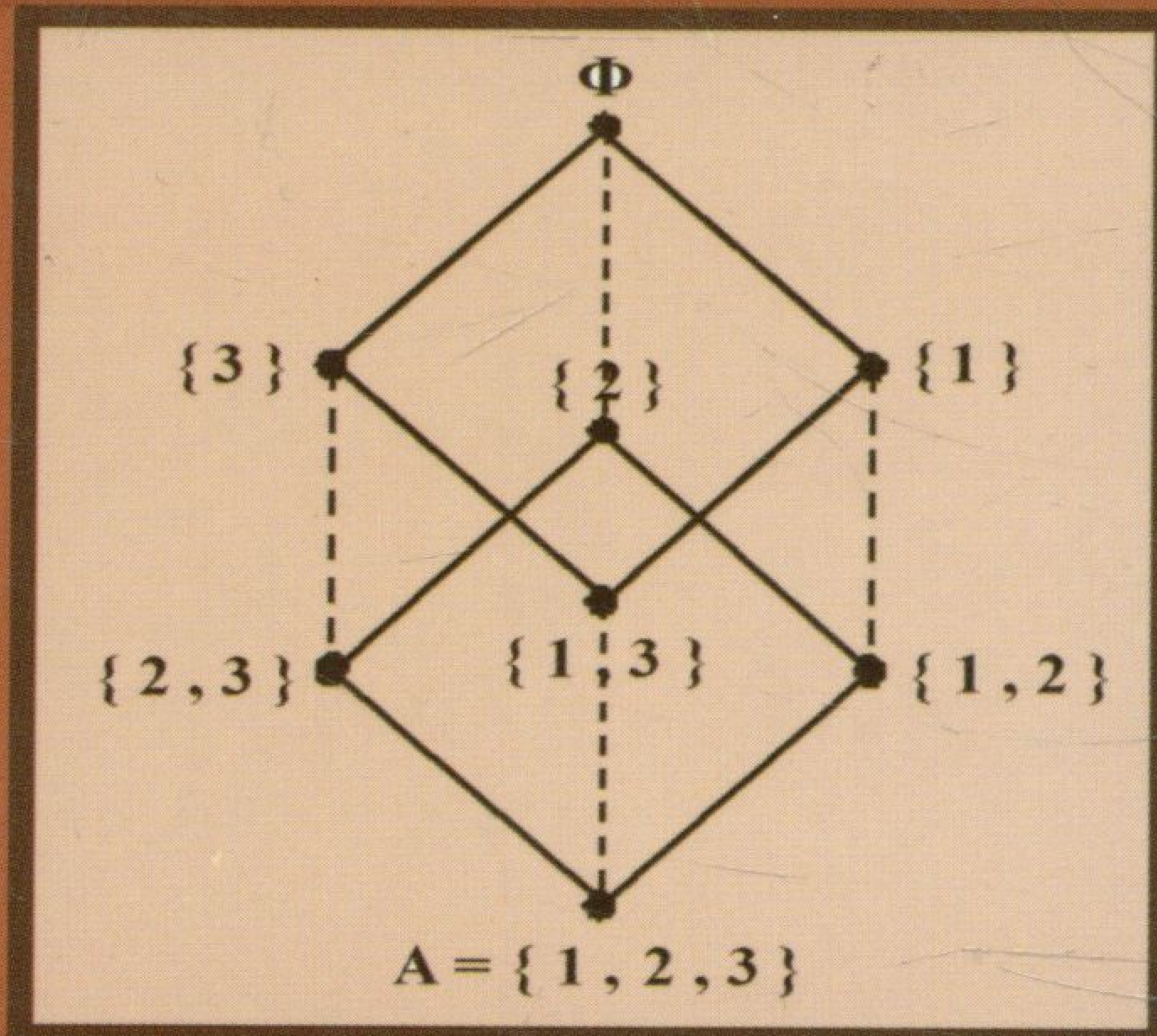
المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الطائف
إدارة النشر العلمي

مبادئ الرياضيات



د/ قطب عبد الحميد محمود قطب

٢٠١٣

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الطائف
إدارة النشر العلمي



مبادئ الرياضيات

الدكتور
قطب عبد الحميد محمود قطب
قسم الرياضيات – كلية العلوم

الطبعة الأولى
١٤٣٤ هـ / ٢٠١٣ م

مبادئ الرياضيات

د. قطب عبد الحميد محمود قطب



جامعة الطائف – الحوية – رمز بريدي: ٢١٩٧٤

المملكة العربية السعودية

(ح) جامعة الطائف ١٤٣٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية اثناء النشر

قطب، قطب عبد الحميد مخمود

مبادئ الرياضيات/ قطب عبد الحميد محمود قطب – الطائف ، ١٤٣٤هـ

٣٦٢ ص: ٢٥×١٧.٥سم

ردمك: ٤ – ٣٧ – ٨١١٥ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١- الرياضيات أ. العنوان

ديوي ٥١٠ ١٤٣٤/٥٩٦٤

رقم الإيداع: ١٤٣٤/٥٦٩٤

ردمك: ٤ – ٣٧ – ٨١١٥ – ٦٠٣ – ٩٧٨

إلى

كل من علمني علما

أراد به وجه الله الكريم

تقديم

بسم الله الرحمن الرحيم

وَأَنْ لَّيْسَ لِلإِنسَانِ إِلا مَا سَعَى ❁ وَأَنَّ سَعْيَهُ سَوْفَ يُرَى ❁ . . صدق الله العظيم ❁

(سورة النجم الآية ٣٩ ، ٤٠)

الحمد لله مدبر الليالي والأيام . . . وأشهد أن لا إله إلا الله الذي لا تحيط به العقول والأوهام . . . وأشهد أن محمداً عبده ورسوله أفضل الأنام . . . صلى الله عليه وعلى سائر آله وأصحابه والتابعين لهم بإحسان على الدوام . . . وسلم تسليماً كثيراً . . . أما بعد :

نظرا لما يمر به العالم من تقدم علمي وتكنولوجي هائل، وانطلاقاً لما تمر به جامعة الطائف من نهضة علمية وخاصة في مجال التأليف والنشر العلمي، وتمشياً مع المحاولات الجادة والمخلصة لتطوير التعليم الجامعي والاهتمام بهدف التركيز على تنمية قدرات الفهم والتحليل والابتكار بدلاً من الحفظ والاستظهار لدى طلاب وطالبات الجامعة، وتأصيلاً لريادة الجامعة في خدمة المجتمع، يطيب لي أن أقدم هذا الكتاب – مستعيناً بقدرة الله تعالى وقوته وتوفيقه – ليكون مُعيناً لطلاب وطالبات السنوات الأولى بالجامعات السعودية في دراسة علم الرياضيات. فهذا الكتاب يعالج الموضوعات بطريقة مغايرة تعتبر مثيرة للطالب ومحفزة له للبحث عما تعلمه واستفاد منه وليس كيف تعلمه، لمساعده على اكتساب المهارات الأساسية في الرياضيات التي تُعِينُه على استيعاب مقررات الرياضيات المتقدمة. لأن الرياضيات هي مفتاح العقل والمساعد الرئيسي في تطوير الذات، والتي اكتسبت شعبية عالمية واسعة خلال العقود الأخيرة بسبب توسيع دائرة تطبيقاتها العملية الواسعة في علوم الحاسب الآلي، وأيضاً لارتباطها الوثيق بالثورات العلمية في المعلومات والاتصالات التكنولوجية المتقدمة والتي تسمى في العصر الحديث بالثورة الرياضية.

ولسأل الله تعالى أن تُعم الفائدة المرجوة والمثمرة من هذا الكتاب الذي يحمل عنوان "**مبادئ الرياضيات**" وذلك بالقدر الذي أرجوه.

وكلـي أمـل أن يسـهم هـذا الكتـاب بقـدر وافـر ووافٍ فـي سـبيل تيسـير "تعلم الرياضيات" علـى طـلاب وطالبات الجامعة، وأن يجدوا فيه ما يواجههم من أسئلة تتعلق بمفردات الرياضيات المتقدمـة. كما آمل أن أتلقـى ملاحظـاتهم واستفسـاراتهم واحتياجـاتهم العلمية لتحسين الكتاب في الطبعات القادمة بإذن الله تعالى.

أخيراً "من لا يشكر الناس لا يشكر الله" فباقة شكر عطرة إلى جميع أفراد أسرتي لصبرهم وتعاونهم وتضحيتهم بالراحة والوقت أثناء إعداد الكتاب، وأسأل المولى عز وجل أن يحفظهم ويرعاهم ويبقيهم ذخراً لي مدى الدهر . والشكر موصول لسعادة الأستاذ الدكتور/ مجدي حسين السيد النحيف أستاذ تكنولوجيا إنتاج الطباعة والنشر والتغليف بجامعة حلوان على مساهمته وجهوده المتميزة في الإخراج الفنى للكتاب على الوجه الأكمل . كما أتقدم بخالص شكري وعظيم امتناني لسعادة الأستاذ الدكتور/مرزوق علي إبراهيم على المراجعة اللغوية التي أضافت للكتاب الكثير.

وأدعو الله سبحانه وتعالى أن أكون قد وُفِّقت في إعداد الكتاب على الوجه الأكمل، كما أسأله سبحانه وتعالى أن يجعل عملي خالصاً لوجهه الكريم.

والله يوفقنا لما فيه خير ونهضة أمتنا

د. قطب عبد الحميد

قائمة

المحتـــويـــات

CONTENTS

فهرس المحتويات

تابع: المحتويات

تابع: المحتويات

تابع: المحتويات

الفصل الأول

النظم العددية للحاسبات الالكترونية

NUMBER SYSTEMS FOR ELECTRONIC COMPUTERS

مقدمة Introduction

استُخدمت الأرقام بواسطة الإنسان منذ عدة قرون، ففي الماضي البعيد ظهرت الحاجة إلى طريقة بسيطة، فكان الرعاة يستخدمون حبات الحصى لإحصاء ما لديهم من أغنام أو ماشية أو أولاد، بحيث تمثل كل حبة حصى واحدة من الأغنام. ولكن مع تطور البشرية فإن هذه الطريقة صارت غير دقيقة في التعامل مع الكميات الكبيرة خصوصاً في المعاملات التجارية والاقتصادية، ومن ثم فإن العرب قد ابتكروا في فجر الحضارة الإسلامية بعض النظم العددية منها نظام الأعداد العشرية التي تتكون من عشرة أرقام يرمز لها بمجموعة الرموز {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}، وهذا النظام مستخدم في حياتنا اليومية والذي استخدمه قدماء المصريين منذ حوالي 3400 سنة قبل الميلاد. وما زالت رموز هذا النظام الرقمية تُستخدم في المجالات العلمية العالمية وتسمى بالأرقام العربية Arabic Numbers. أما الأرقام التي نستخدمها نحن العرب والتي تتكون من مجموعة الأرقام { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } فتسمى بالأرقام الهندية Hindi Numbers.

وسبب انتشار النظام العشري أنه يعتمد في الأساس على العدد 10، وقد قام الإنسان منذ قديم الأزل باستخدام أصابع يده العشرة في عملية العد، وعلى الرغم من أنه هو النظام الشائع الاستخدام فإنه توجد أنظمة كثيرة أخرى. ولكننا سوف نقتصر في هذا الفصل بشيء من التحليل على النظم الأربعة المستخدمة مع نظم الحاسبات الالكترونية، وأيضاً جميع الأجهزة الالكترونية الحديثة وخاصة الأجهزة والمعدات الحربية المطورة التي تستخدم في توجيه الصواريخ إلى أهدافها، سواء صواريخ أرض أرض أو صواريخ أرض جو وغيرها، وكذلك حساب مواقع الطائرات بواسطة الرادار، كما أن الحاسبات الرقمية جزء لا يتجزأ من مكونات الأقمار الصناعية اللازمة للاتصالات الفضائية. وهذه الأنظمة هي:

- النظام العددي العشري Decimal Numbers System
- النظام العددي الثنائي Binary Numbers System
- النظام العددي الثماني Octal Numbers System

• النظام العددي السادس عشر Hexadecimal Numbers System

نعلم جميعاً أنه من ضمن مكونات أي آلة كهربائية مفتاح للإضاءة والإطفاء، أي تكون إحدى المكونات لآي آلة عملية ثنائية. كذلك الحال بالنسبة للمكونات الالكترونية للأجهزة التي تعمل بنظام الحاسبات (منها الأجهزة الحربية الحديثة) تكون بطبيعتها ثنائية الحالة، أي أنها تكون في إحدى حالتين (تعمل أو لا تعمل). وعادة يرمز لهاتين الحالتين بالرقمين (1 أو 0) وهما أيضاً رمزان للأرقام في النظام الثنائي للأعداد. ومن هنا فإن إحدى الحلقات في ذاكرة الأجهزة الالكترونية (الأقراص) إما أن تكون ممغنطة وتمثل واحد (1) أو غير ممغنطة وتمثل صفر (0). بالإضافة إلى ذلك فإن أي وحدة معلومات تمثل في الحاسب بسلسلة من هذه الأرقام والتي تسمى (وحدة أساسية) للاختصار (بت). مثل هذه السلسلة من الوحدات الأساسية يمكن اعتبارها أرقاماً ثنائية (**BIT**) **BI**nary dig**T**، والكثير من الحاسبات تستخدم النظام الثنائي، ليس فقط لتمثيل الكميات ولكن أيضاً لتنفيذ الحسابات باستخدام الحساب الثنائي.

وسوف نبدأ بعرض وتحليل للنظام العشري المألوف لدينا كمنهاج وأسلوب لدراسة باقي الأنظمة الثلاث الأخرى.

أولاً: النظام العددي العشري Decimal Numbers System

هو النظام المستخدم في حياتنا اليومية والذي تعلمنه منذ الصغر واستعملناه كثيراً، وقد استُوحِيَ هذا النظام من الوسيلة الأولى للعد وهي أصابع اليد العشرة، ويَستخدِم هذا النظام مجموعة الأرقام **{0 ،1 ،2 ،3 ،4 ،5 ،6 ،7 ،8 ،9}**. وبالتالي فإن أساس هذا النظام هو الرقم 10.

يتضمن أسلوب دراسة النظام العشري التعرف على العناصر التالية:

- أساس النظام (Base) = 10.
- الأرقام المستخدمة في النظام (Digits) وهي:

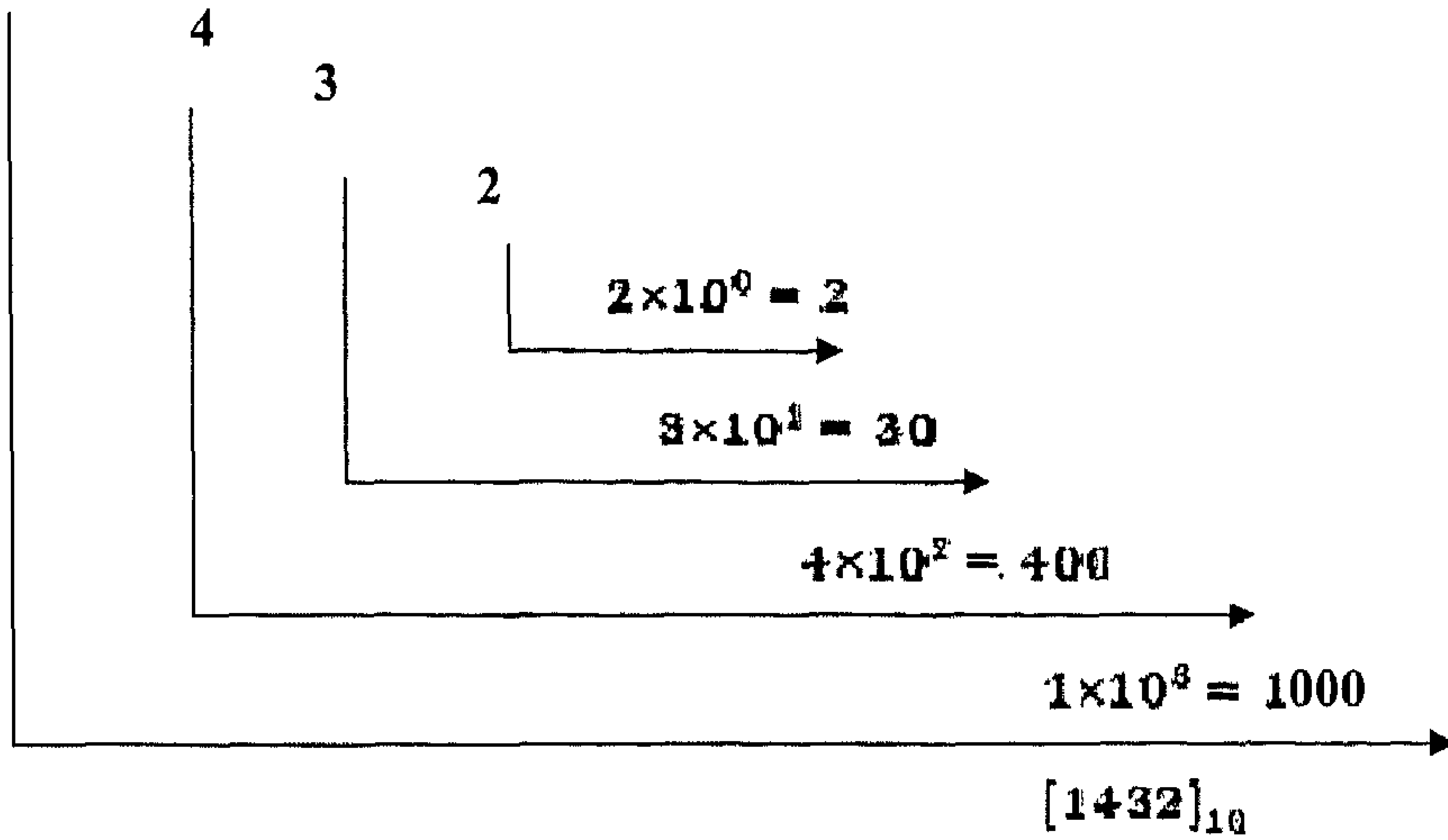
$$Digits = \{0 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9\}$$

- قيم المواضع (Positional Values) وهي كالآتي:
  - موضع الآحاد = 1 أي $(10^0 = 1)$.
  - موضع العشرات = 10 أي $(10^1 = 10)$.
  - موضع المئات = 100 أي $(10^2 = 100)$.
  - موضع الألوف = 1000 أي $(10^3 = 1000)$. وهكذا.

مثال (١): حلل العدد العشري $[1432]_{10}$ طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

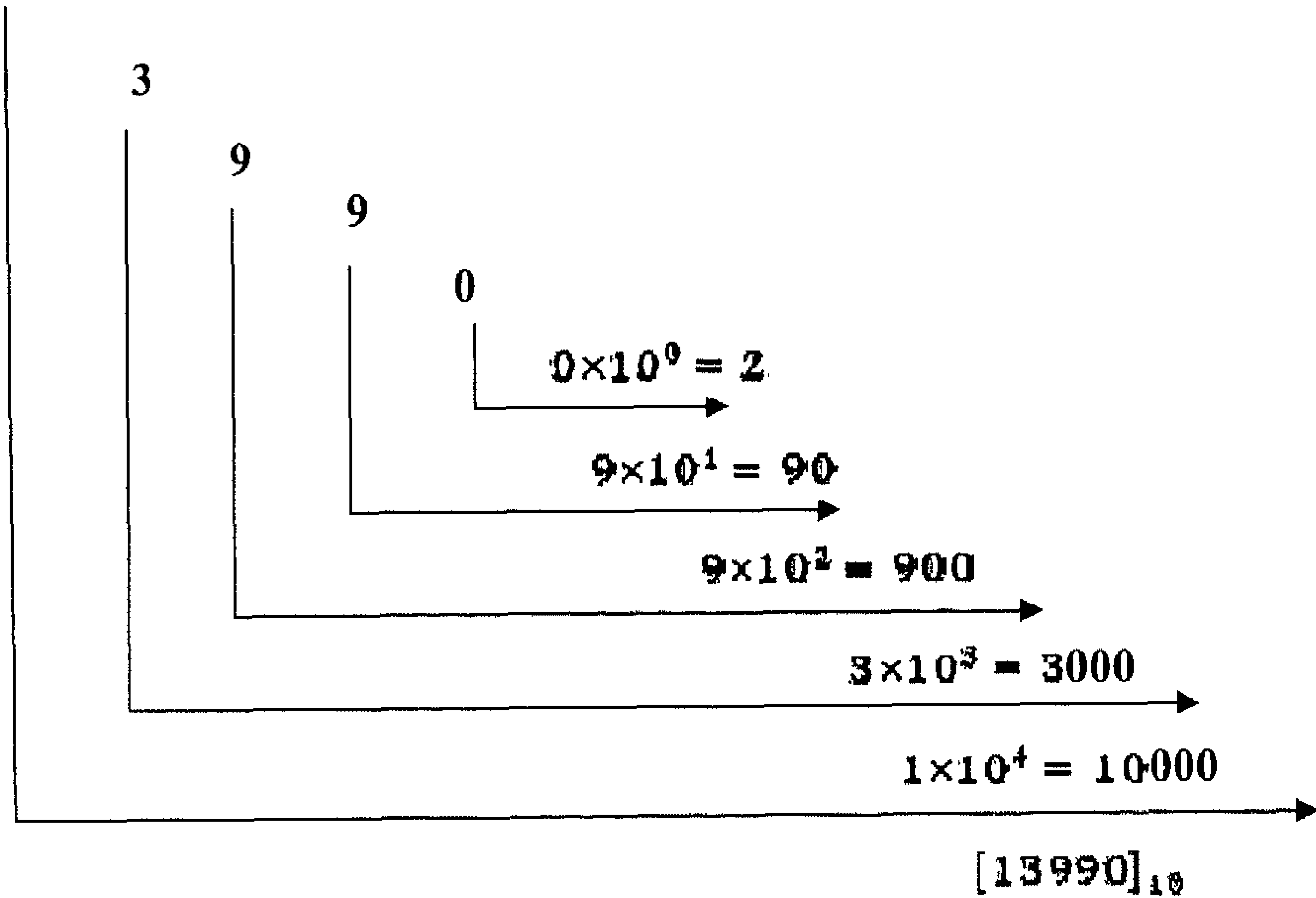
يمكن تحليل العدد العشري $[1432]_{10}$ طبقاً لقيم مواضعه على النحو التالي:



مثال (٢): حلل العدد العشري $[13990]_{10}$ طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

يمكن تحليل العدد العشري $[13990]_{10}$ طبقاً لقيم مواضعه على النحو التالي:



ثانياً: النظام العددي الثنائي Binary Numbers System

هذا هو النظام المستخدم في عمل أجهزة الحاسبات الالكترونية حيث يقوم الحاسب بتمثيل جميع البيانات داخل الذاكرة بواسطة الحلقات الممغنطة والتي تمثل وحدة بنـــاء ذاكرة الحاسب، كما تمثل حالتين [(1) ON] , [(0) OFF]. ومن ثم فإن الحاسـب الآلي يعتمد أساساً على النظام الثنائي الذي يستخدم الرقمين الصفر والواحد. أي أنه يتم تسجيل البيانات في الذاكرة على شكل نقاط مغناطيسية بواسطة رأس القراءة والكتابـــة، حيث تمثل هذه النقاط البيانات في صورتها الثنائية فتكون النقطة الممغنطة تمثـــل (1)، وغير الممغنطة تمثل (0). وتسمى هذه العملية (بت – BIT). وهي اختصار كلمتي BInary digiT. ويكون أساس هذا النظام هو الرقم 2.

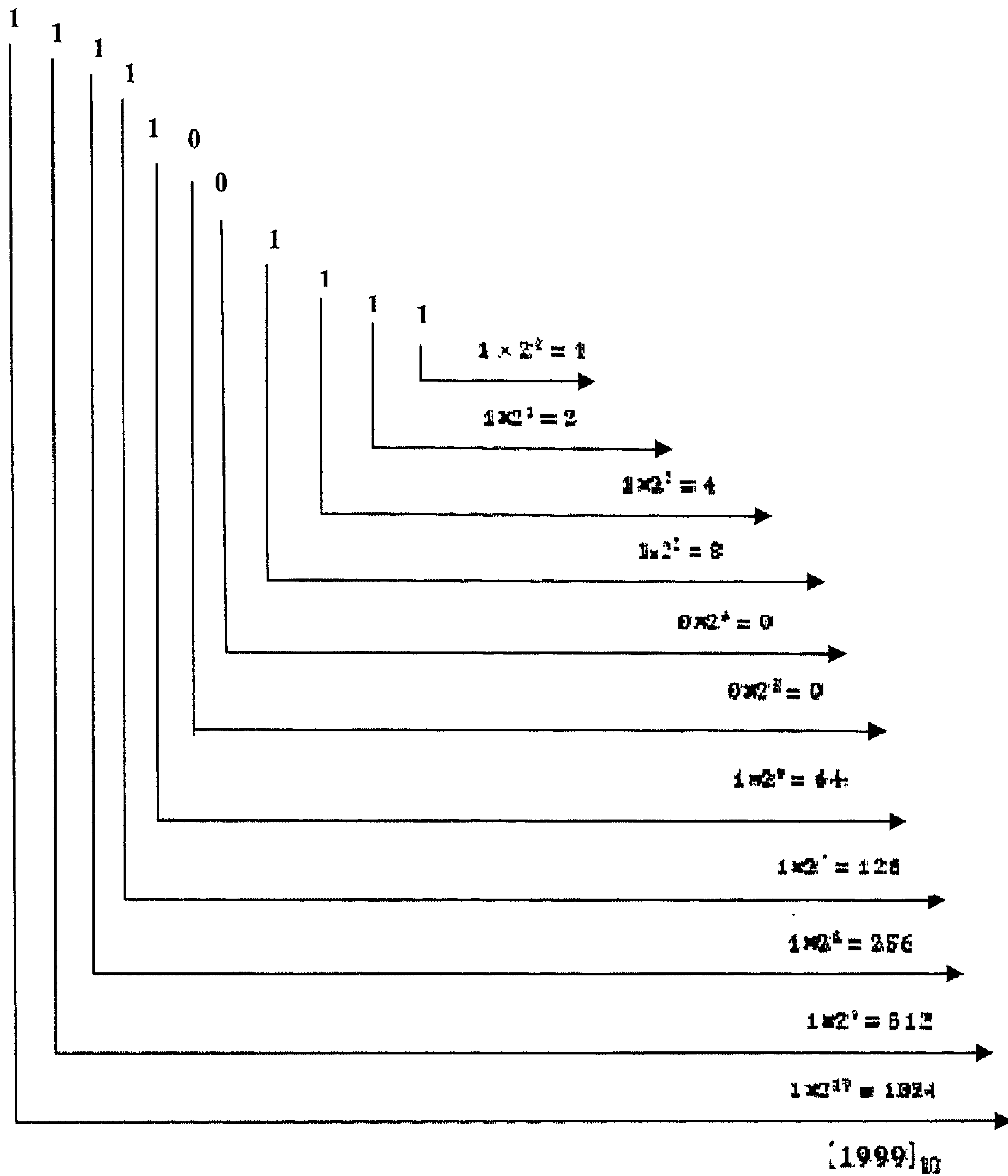
يتضمن أسلوب دراسة النظام الثنائي التعرف على العناصر التالية :

- أساس النظام (Base) = 2.
- الأرقام المستخدمة في النظام (Digits) هي (0 ، 1).
- قيم المواضع (Positional Values) وهي كالآتي:
  - قيمة الموضع الأول = 1 أي ($2^0 = 1$).
  - قيمة الموضع الثاني = 2 أي ($2^1 = 2$).
  - قيمة الموضع الثالث = 4 أي ($2^2 = 4$).
  - قيمة الموضع الرابع = 8 أي ($2^3 = 8$). وهكذا.

مثال (٣): حلل العدد الثنائي $[1111100111]_2$ إلى عدد في النظام العشري طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

يمكن تحليل العدد الثنائي $[1111100111]_2$ طبقاً لقيم مواضعه على النحو التالي:

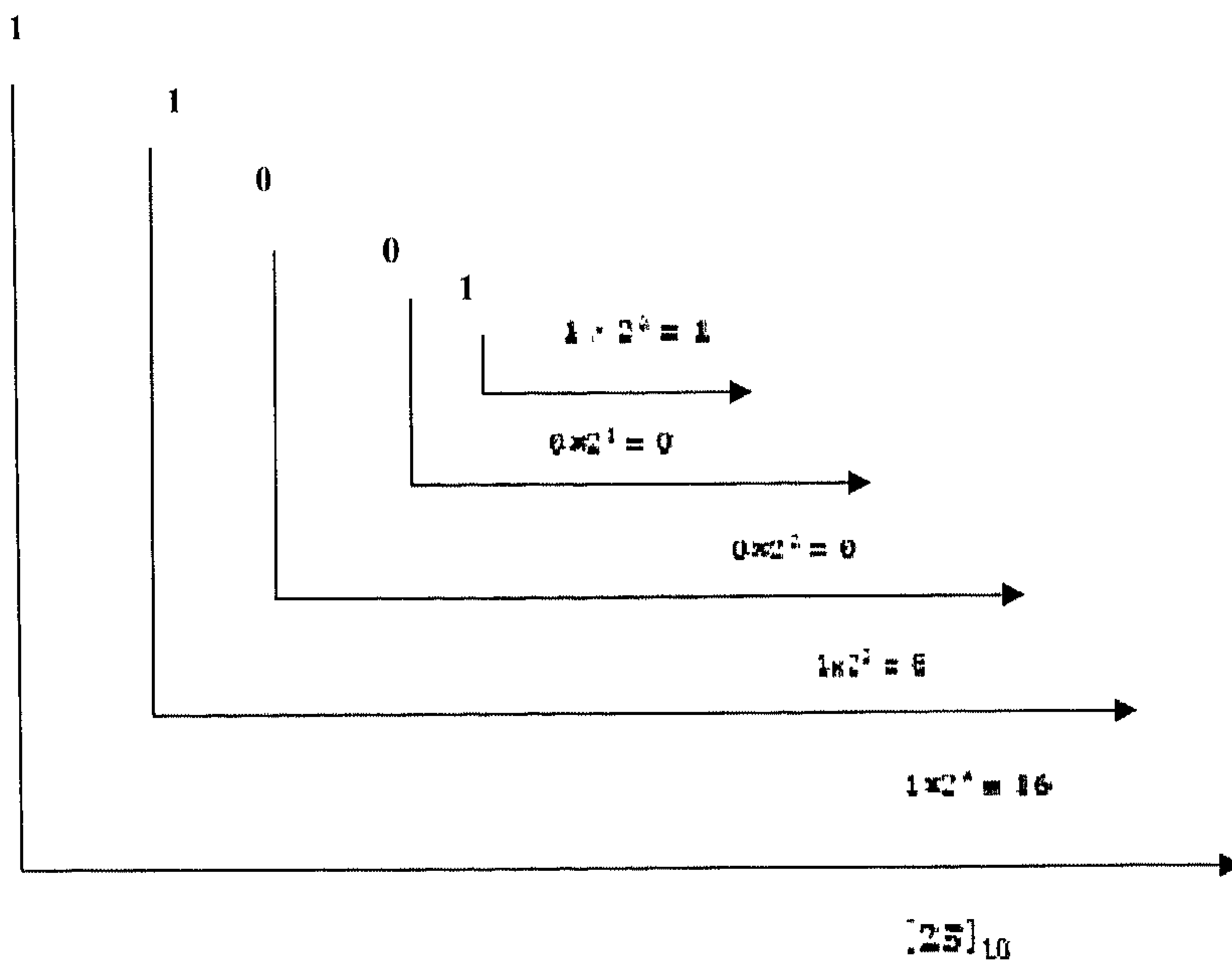


وبالتالي فإنه يمكن تحويل المقدار العـــددي $[11111001111]_2$ مـــن النظـــام الثنائي إلى العدد $[1999]_{10}$ في النظام العشري.

مثال (٤): حلل العدد الثنائي $[11001]_2$ إلى عدد في النظام العشري طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

يمكن تحليل العدد الثنائي $[11001]_2$ طبقاً لقيم مواضعه على النحو التالي:



أي أن العدد $[11001]_2$ يمكن تحويله إلى العدد $[25]_{10}$ في النظام العشري.

الجدول التالي يوضح العلاقة بين أرقام النظام العشري وقيم مواضع العدد في النظام الثنائي:

الثنائي					النظام
16	8	4	2	1	العشري
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	9

ثالثاً: النظام العددي الثماني Octal Numbers System

هو أحد الأنظمة التي تعمل بها بعض الحاسبات الإلكترونية من خلال النظام الثنائي مثل الحاسبات الخاصة ببعض الشركات العالمية الشهيرة. ويتضمن أسلوب دراسة النظام الثماني التعرف على العناصر التالية:

- أساس النظام (Base) = 8.
- الأرقام المستخدمة في النظام (Digits) هي:

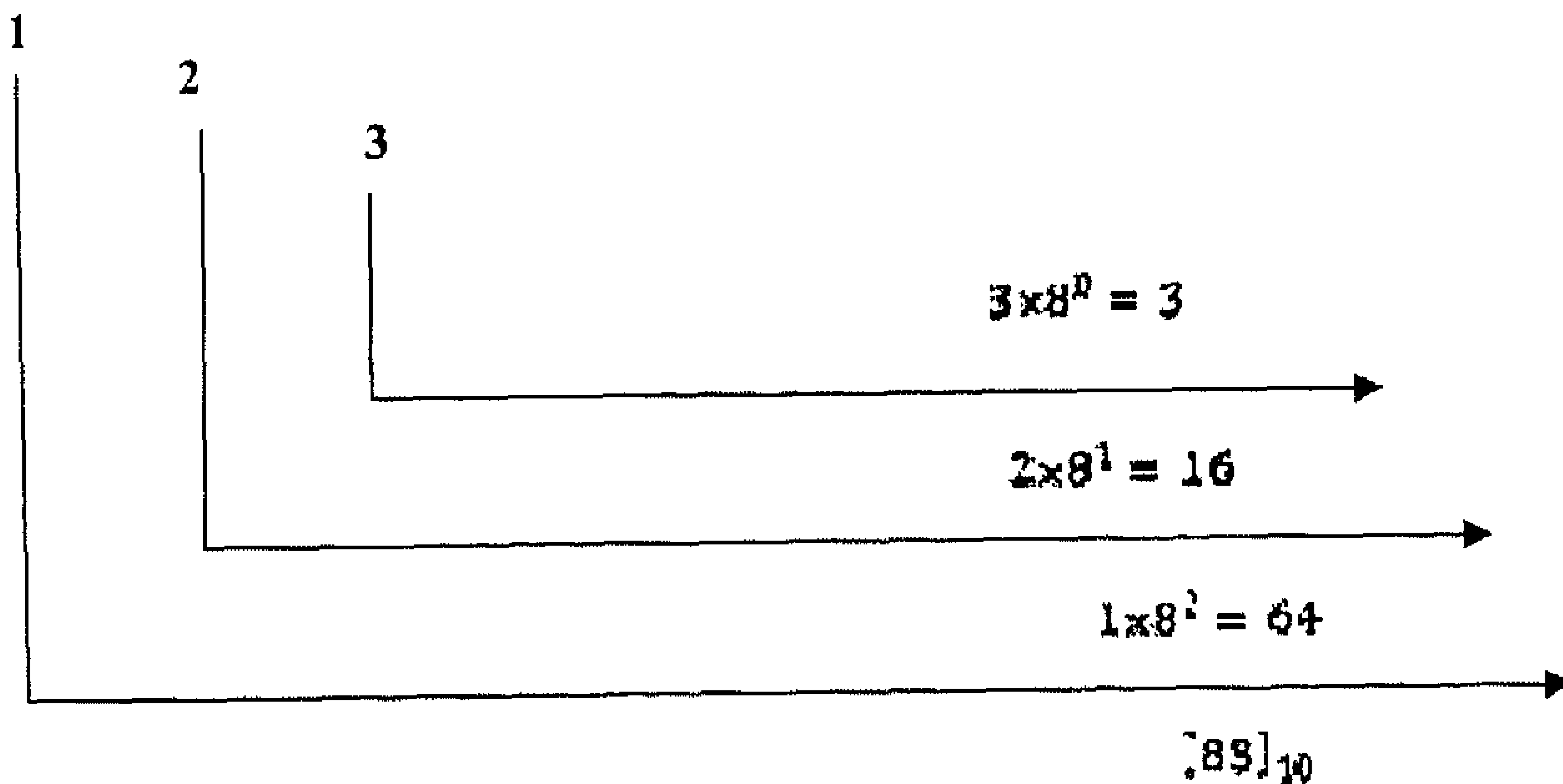
$$Digits = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}.$$

- قيم المواضع (Positional Values) وهي كالآتي:
  - قيمة الموضع الأول = 1 أي $(8^0 = 1)$.
  - قيمة الموضع الثاني = 8 أي $(8^1 = 8)$.
  - قيمة الموضع الثالث = 64 أي $(8^2 = 64)$.
  - قيمة الموضع الرابع = 512 أي $(8^3 = 512)$. وهكذا.

مثال (٥): حلل العدد الثماني $[123]_8$ إلى عدد في النظام العشري طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

يمكن تحليل العدد الثماني $[123]_8$ طبقاً لقيم مواضعه على النحو التالي:



أي أن العدد $[123]_8$ يمكن تحويله إلى العدد $[83]_{10}$ في النظام العشري.

الجدول التالي يوضح العلاقة بين أرقام النظام العشري وقيم مواضع العدد في النظام الثنائي وأيضاً النظام الثماني:

النظام العشري	0	1	2	3	4	5	6	7
النظام الثنائي	000	001	010	011	100	101	110	111
النظام الثماني	0	1	2	3	4	5	6	7

رابعاً: النظام العددي السادس عشر

Hexadecimal Numbers System

هو أحد الأنظمة التي تعمل بها بعض الأجهزة الإلكترونية من خلال النظام الثنائي مثل الحاسبات الخاصة بشركة **IBM**. ويتضمن أسلوب دراسة النظام السادس عشر التعرف على العناصر التالية:

✪ أساس النظام (Base) = 16.

✪ الأرقام المستخدمة في النظام (Digits) هي:

$Digits = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B , C , D , E , F \}.$

✪ قيم المواضع (Positional Values) وهي كالآتي:

♦ قيمة الموضع الأول = 1 أي $(16^0 = 1)$.

♦ قيمة الموضع الثاني = 16 أي $(16^1 = 16)$.

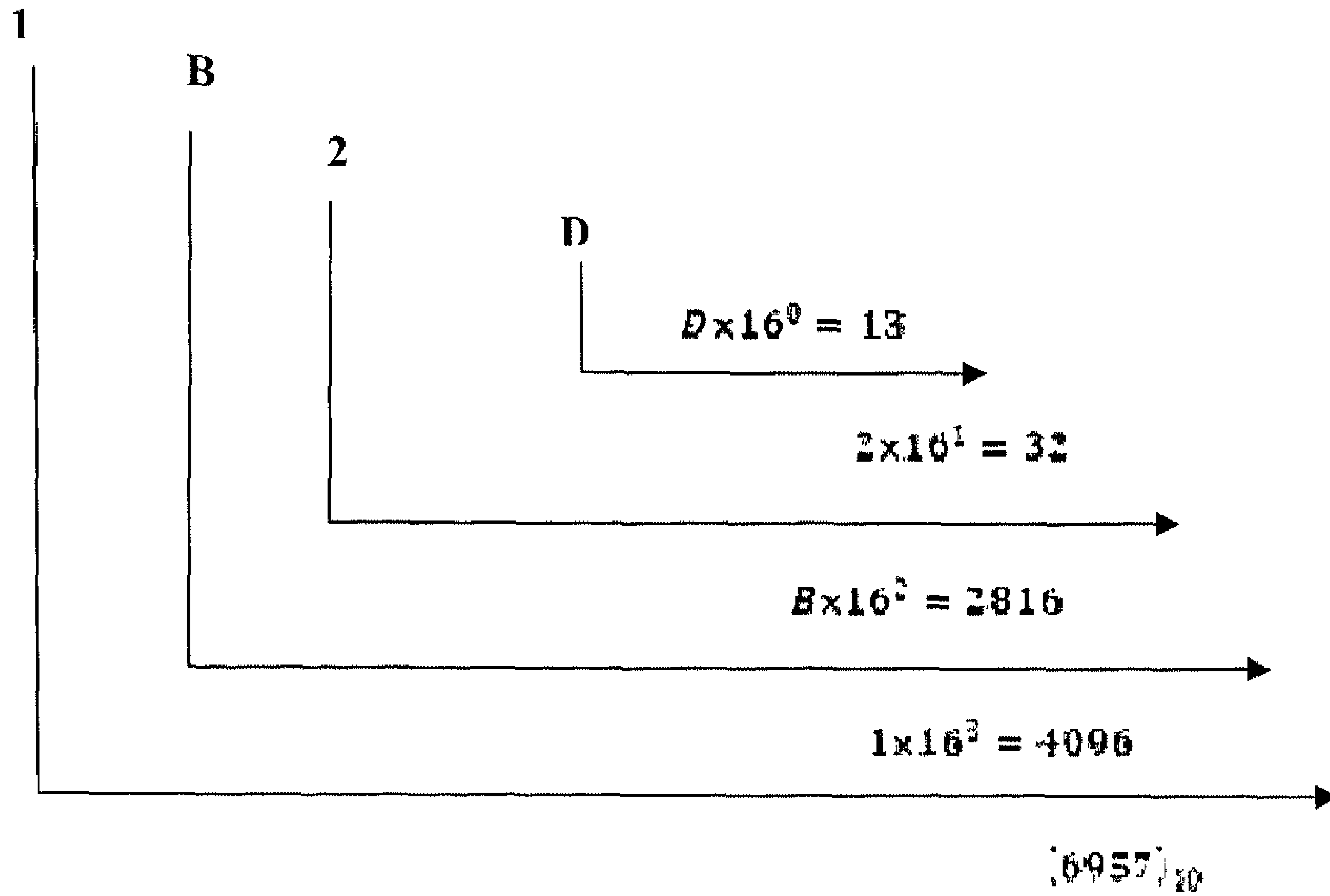
♦ قيمة الموضع الثالث = 256 أي $(16^2 = 256)$.

♦ قيمة الموضع الرابع = 4096 أي $(16^3 = 4096)$. وهكذا.

مثال (٦): حلل العدد في النظام السادس عشر $[1B2D]_{16}$ إلى عدد في النظام العشري طبقاً لقيم مواضعه.

الحل

يمكن تحليل العدد السادس عشر $[1B2D]_{16}$ طبقاً لقيم مواضعه علـــى النحـــو التالي:



أي أن العدد $[1B2D]_{16}$ يمكن تحويله إلى العدد $[6957]_{10}$ في النظام العشري.

الجدول التالي يوضح العلاقة بين أرقام الأنظمة الأربعة :

(العشري ، الثنائي ، الثماني ، السادس عشر)

النظام السادس عشر	النظام الثماني	النظام الثنائي	النظام العشري
0	0	0000	0
1	1	0001	1
2	2	0010	2
3	3	0011	3
4	4	0100	4
5	5	0101	5
6	6	0110	6
7	7	0111	7
8	10	1000	8
9	11	1001	9
A	12	1010	10
B	13	1011	11
C	14	1100	12
D	15	1101	13
E	16	1110	14
F	17	1111	15

خامساً: التحويلات العددية بين الأنظمة

Numbering Conversion Between Systems

٥/١- التحويل من النظام العشري إلى الأنظمة الأخرى

Decimal System to Another Systems Conversion

للتحويل من النظام العشري إلى الأنظمة المختلفة الأخرى، نتبع القاعد الآتية:

يتم قسمة العدد العشري المراد تحويله (إلى رقم في أي نظام آخر) قسمة متتالية على أساس النظام المراد التحويل إليه حتى الحصول على خارج القسمة يساوي صفر. والباقي في كل خطوة من خطوات عملية القسمة يتم الاحتفاظ به. وتمثل قيم الباقي القيمة العددية للنظام المراد التحويل إليه المكافئة للعدد العشري المراد تحويله.

٥/١/١- التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي

Decimal System to Binary System Conversion

للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي يتم قسمة الرقم العشري قسمة متتالية على الأساس 2 حتى نصل إلى خارج القسمة يساوي صفر. والباقي في كل خطوة من خطوات عملية القسمة يمثل القيمة الثنائية للرقم العشري.

مثال (٧): حول العدد في النظام العشري $[109]_{10}$ إلى ما يكافئه بالنظام الثنائي.

الحل

لتحويل العدد $[109]_{10}$ إلى المكافئ الثنائي، نقسم هذا العدد وخوارج القسمة المتتالية على الأساس 2 ونحدد عدد باقي القسمة في كل مرة، كما يلي:

2	109	Remainder	1
2	54	"	0
2	27	"	1
2	13	"	1
2	6	"	0
2	3	"	1
2	1	"	1
	0		

Read

خارج القسمة يساوي صفر يعني نهاية الحسابات. ومن الملاحظ أن الباقي دائماً 0 أو 1 فقط. كما أن البواقي تعطي المكافئ الثنائي وتُقرأ من أسفل إلـــى أعلـــى. أي أن الرقم هو $[1101101]_2 = [109]_{10}$.

ولتحقيق صحة النتائج نقوم بضرب كل رقم ثنائي في قيمة موضعه كما يلي:

1 1 0 1 1 0 1

$1 \times 2^0 = 1$

$0 \times 2^1 = 0$

$1 \times 2^2 = 4$

$1 \times 2^3 = 8$

$0 \times 2^4 = 0$

$1 \times 2^5 = 32$

$1 \times 2^6 = 64$

$[109]_{10}$

وبالتالي فإن العلاقة متحققة في الاتجاهين.

٥/١/٢- التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني

Decimal System to Octal System Conversion

للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني، نتبع نفس القاعدة المستخدمة في النظام الثنائي، ولكن تكون القسمة على الأساس 8 (أساس النظام الثماني).

مثال (٨): حول العدد في النظام العشري $[109]_{10}$ إلى ما يكافئه بالنظام الثماني.

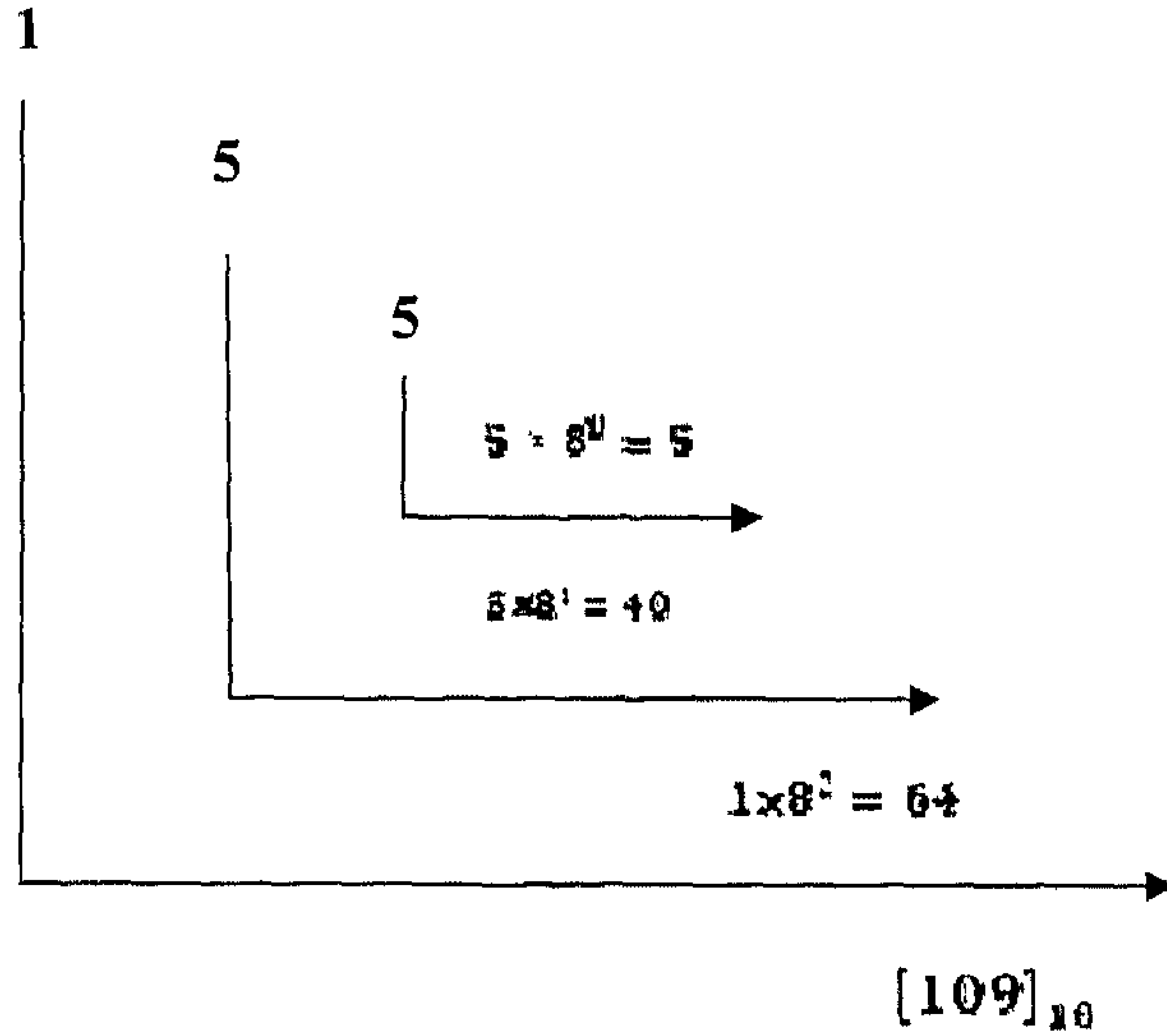
الحل

لتحويل العدد $[109]_{10}$ إلى المكافئ الثماني، نقسم هذا العدد وخوارج القسمة المتتالية على الأساس 8 ونحدد عدد باقي القسمة في كل مرة، كما يلي:

8	109	Remainder	5	Read ↑
8	13	"	5	
8	1	"	1	
	0			

خارج القسمة يساوي صفر يعني نهاية الحسابات. وبالتالي فإن الرقم هو: $[109]_{10} = [155]_8$.

ولتحقيق صحة النتائج نقوم بضرب كل رقم ثماني في قيمة موضعه كما يلي:



وبالتالي فإن العلاقة متحققة في الاتجاهين.

٣/١/٥- التحويل من النظام العشري إلى النظام السادس عشر

Decimal System to Hexadecimal System Conversion

للتحويل من النظام العشري إلى النظام السادس عشر، نتبع نفس القاعدة المستخدمة في النظام الثنائي والثماني، ولكن تكون القسمة على الأساس 16 (أساس النظام السادس عشر).

مثال (٩): حول العدد في النظام العشري $[109]_{10}$ إلى ما يكافئه بالنظام السادس عشر.

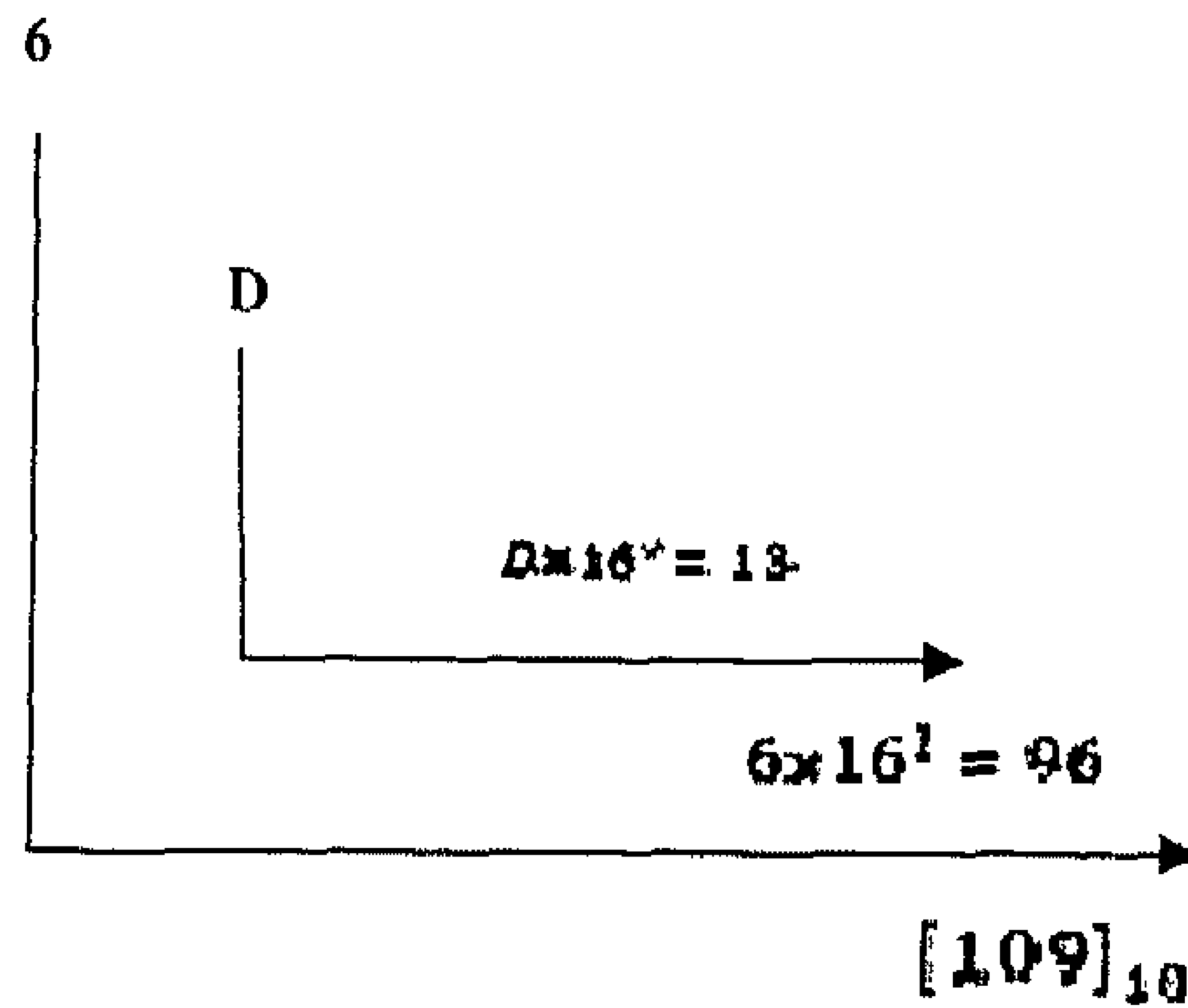
الحل

لتحويل العدد $[109]_{10}$ إلى المكافئ السادس عشر، نقسم هذا العـــدد وخـــوارج القسمة المتتالية على الأساس 16 ونحدد عدد باقي القسمة في كل مرة، كما يلي:

16	109	Remainder	D	Read ↑
16	6	"	6	
	0			

خارج القسمة يساوي صفر يعني نهاية الحسابات. وبالتـــالي فـــإن الـــرقم هـــو: $[109]_{10} = [6D]_{16}$.

ولتحقيق صحة النتائج نقوم بضرب كل رقم سادس عشر في قيمة موضعه كمـــا يلي:



وبالتالي فإن العلاقة متحققة في الاتجاهين.

يتضح من الأمثلة (٧) ، (٨) ، (٩) أن:

$$[109]_{10} = [1101101]_2 = [155]_8 = [6D]_{16}$$

مثال (١٠): حول العدد في النظام العشري $[149]_{10}$ إلى ما يكافئه بالنظام السادس عشر.

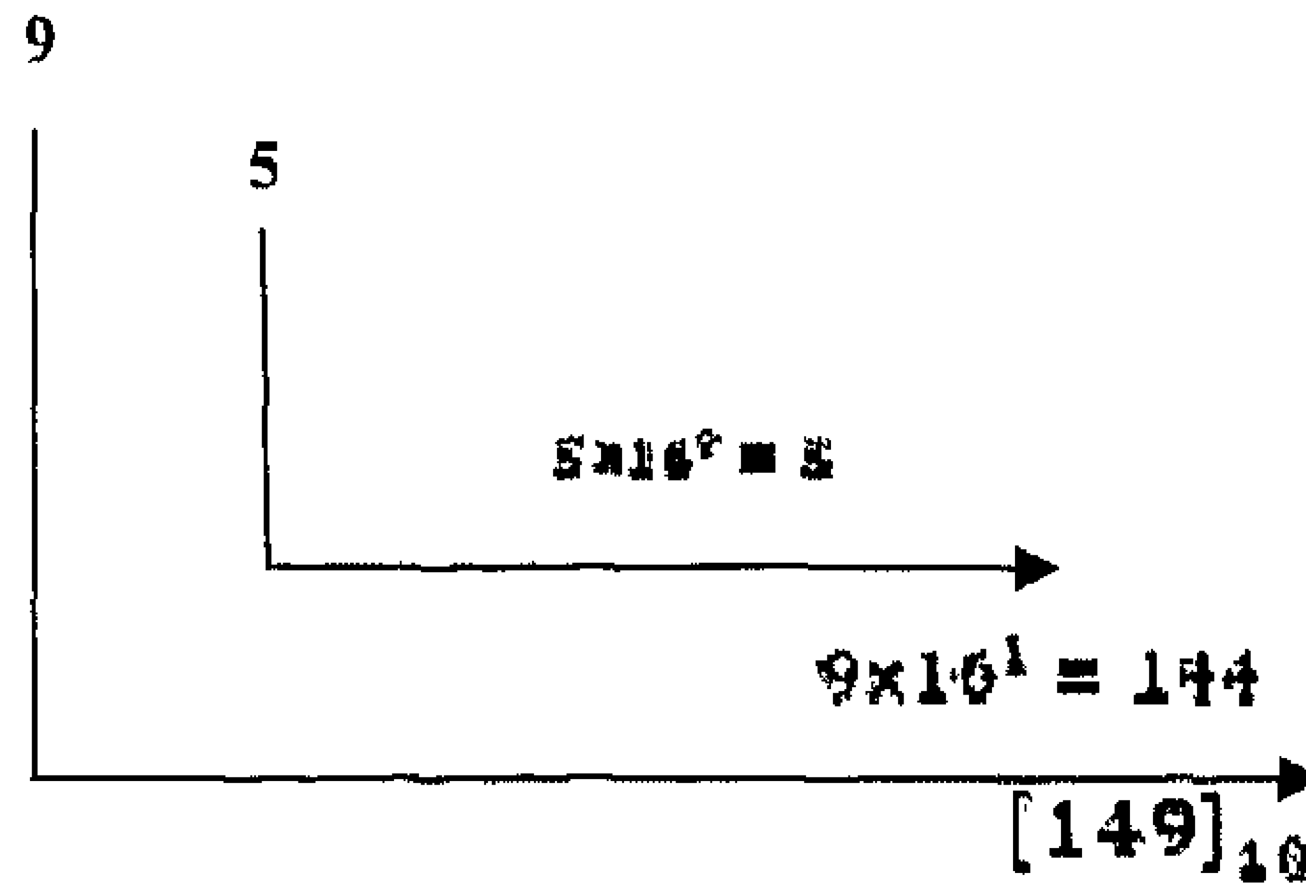
الحل

لتحويل العدد $[149]_{10}$ إلى المكافئ السادس عشر، نقسم هذا العـــدد وخـــوارج القسمة المتتالية على الأساس 16 ونحدد عدد باقي القسمة في كل مرة، كما يلي:

16	149	Remainder	5	Read ↑
16	9	"	9	
	0			

خارج القسمة صـــفر يعنـــي نهايـــة الحـــسابات. وبالتـــالي فـــإن الـــرقم هـــو: $[149]_{10} = [95]_{16}$.

ولتحقيق صحة النتائج نقوم بضرب كل رقم سادس عشر في قيمة موضعه كما يلي:



وبالتالي فإن العلاقة متحققة في الاتجاهين.

٥/٢- التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني

Binary System to Octal System Conversion

للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني، يتم تقسيم مجموعة الأرقام الثنائيـــة المكونة للعدد الثنائي إلى حزم ثلاثية، ثم نتعامل مع كل حزمة على حدة، فيكون الناتج هو العدد الثماني المطلوب.

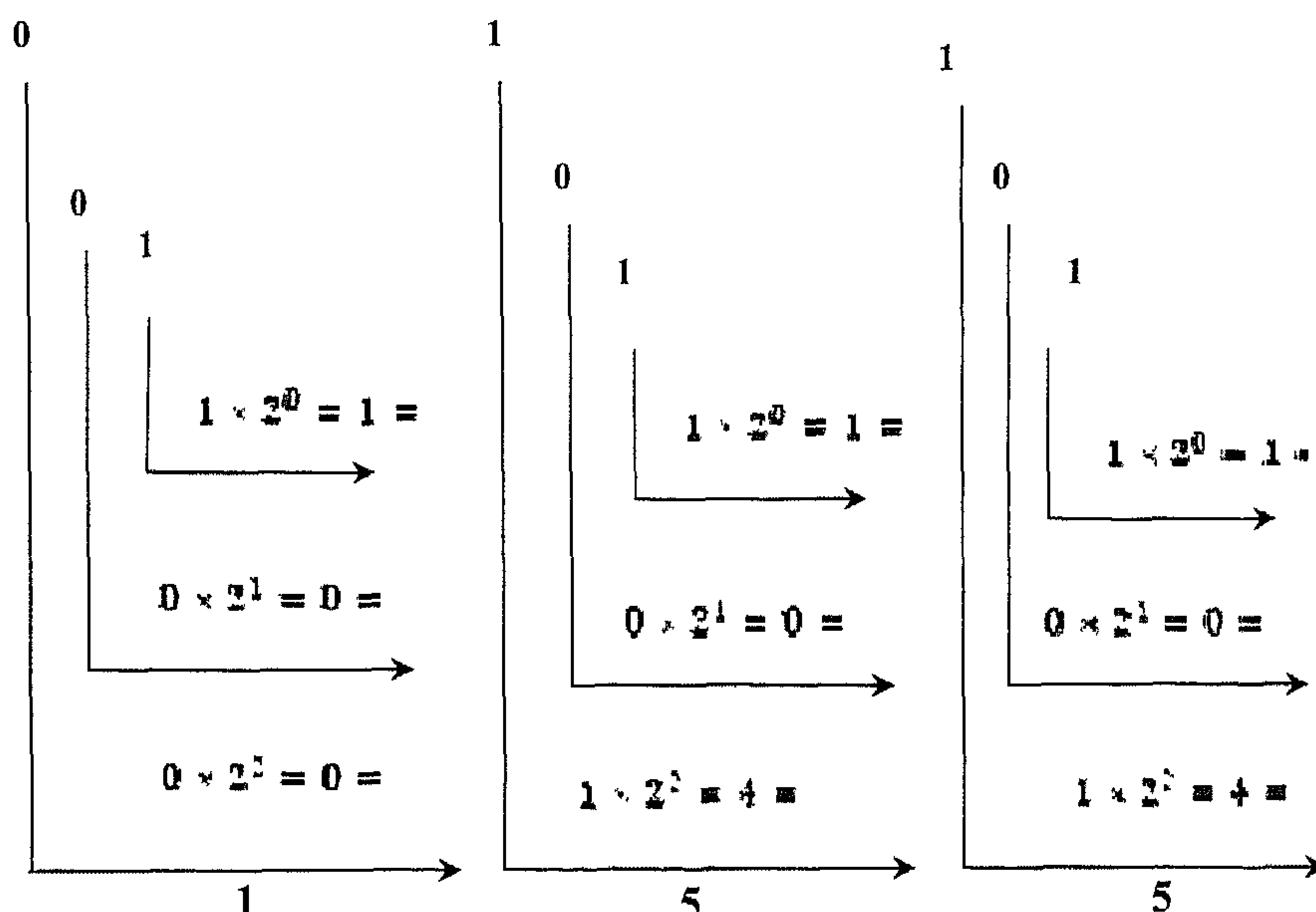
مثال (١١): حول العدد في النظام الثنائي $[11001101]_2$ إلى ما يكافئه بالنظام الثماني.

الحل

لتحويل العدد $[1101101]_2$ إلى ما يكافئه بالنظام الثماني نقس هذا العدد إلـــى حزم ثلاثية كالآتي:

$$\underline{001}\quad \underline{101}\quad \underline{101}$$

ثم نتعامل مع كل حزمة على حدة كالآتي:



فيكون الناتج $[155]_8$ هو الرقم المطلوب في النظام الثماني. أي أن:

$$[1101101]_2 = [155]_8$$

وهذا يدل على صحة النتيجة في المثالين (٧) ، (٨). أي أن:

$$[109]_{10} = [1101101]_2 = [155]_8$$

٥/٣- التحويل من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر

Binary System to Hexadecimal System Conversion

للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر، يتم تقسيم مجموعة الأرقـــام الثنائية المكونة للعدد الثنائي إلى حزم رباعية، ثم نتعامل مع كل حزمة علـــى حـــدة، فيكون الناتج هو العدد السادس عشر المطلوب.

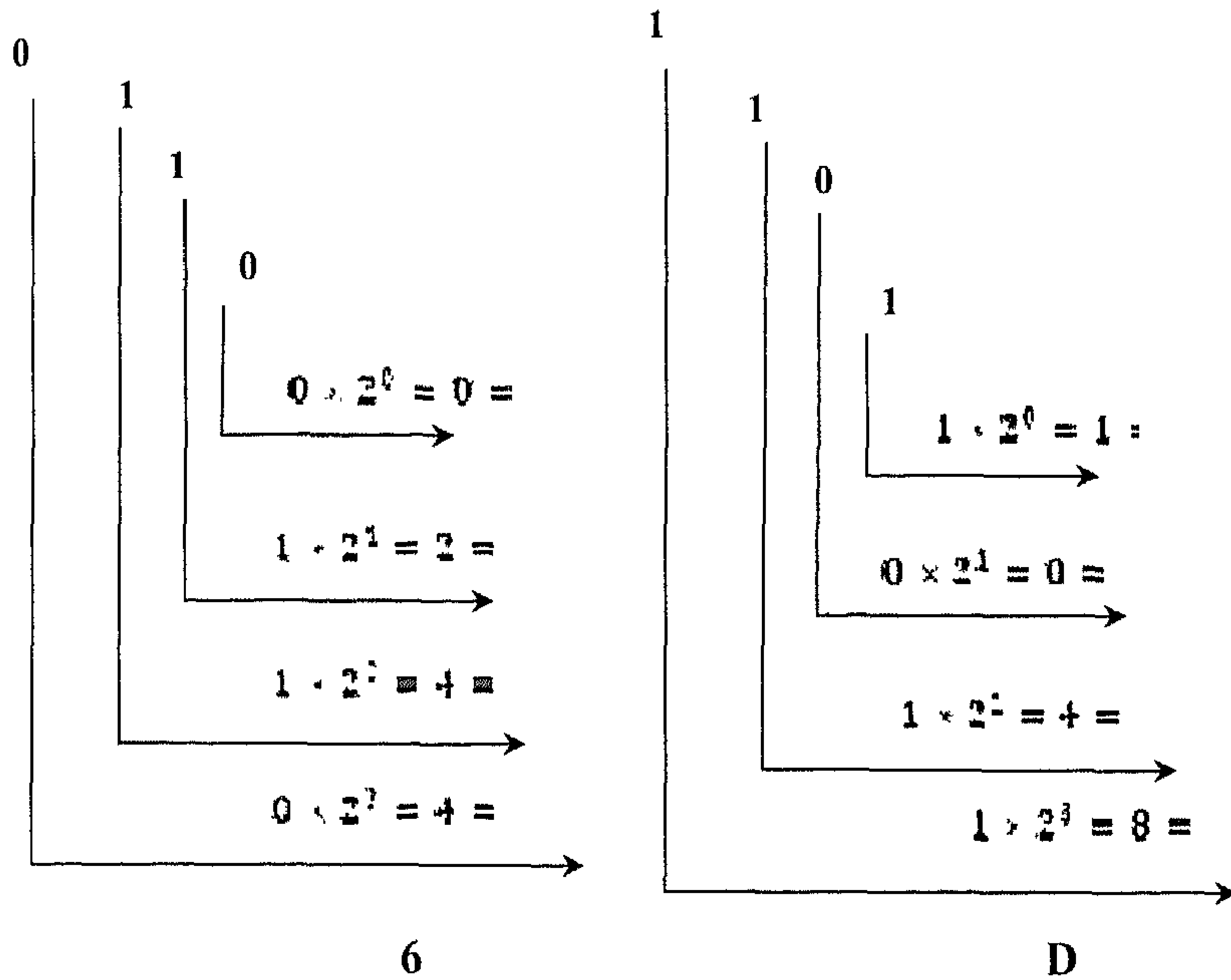
مثال (١٢): حول العدد في النظام الثنائي $[1101101]_2$ إلى ما يكافئه بالنظام السادس عشر.

الحل

لتحويل العدد الثنائي $[1101101]_2$ إلى ما يكافئه بالنظام السادس عشر نقسم هذا العدد إلى حزم رباعية كالآتي:

0110   1101

ثم نتعامل مع كل حزمة على حدة كالآتي:



فيكون الناتج $[6D]_{16}$ هو الرقم المطلوب في النظام السادس عشر. أي أن:

$$[1101101]_2 = [6D]_{16}$$

وهذا يدل على صحة النتيجة في المثالين (٧) ، (٩). أي أن:

$$[109]_{10} = [1101101]_2 = [6D]_{16}$$

سادساً: العمليات الحسابية على النظام الثنائي

Arithmetic Operations on Binary System

يمكن تطبيق العمليات الحسابية مثل الجمع والطرح والضرب على الأرقام الثنائية كالآتي:

٦/١- الجمع الثنائي Binary Addition

هناك قاعدة هامة لعملية الجمع بين الأرقام الثنائية، ألا وهي:

i) $0 + 0 = 0$

ii) $0 + 1 = 1$

iii) $1 + 0 = 1$

iv) $1 + 1 = 0$ **with a carry of 1**

الخطوة (iv) تعني أنه بعد عملية الجمع 1+1 تكون النتيجة تساوي 0 ويضاف 1 إلى العمود التالي مباشرة مع تطبيق القواعد الثلاث الأخرى أيضاً.

مثال (١٣): اجرِ عملية الجمع 5 + 7 وذلك باستخدام طريقة الجمع الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 5 يكافئ العدد الثنائي $[101]_2$.

كما أن العدد 7 يكافئ العدد الثنائي $[111]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الجمع الثنائي كالآتي:

①	①	①	
	1	0	1
+	1	1	1
1	1	0	0

وتكون نتيجة الجمع هي $[1100]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[12]_{10}$ في النظام العشري.

مثال (١٤): أوجد حاصل جمع العددين (20 , 15) وذلك باستخدام طريقة الجمع الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 15 يكافئ العدد الثنائي $[1111]_2$.

كما أن العدد 20 يكافئ العدد الثنائي $[10100]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الجمع الثنائي كالآتي:

		①	①	①		
		0	1	1	1	1
+		1	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	1

أي أن نتيجة الجمع هي $[100011]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[35]_{10}$ في النظام العشري.

٢/٦- الطرح الثنائي Binary Subtraction

توجد قاعدة هامة وأساسية لعملية طرح الأرقام الثنائية، وهي:

i) 0 - 0 = 0

ii) 0 - 1 = 1 with a borrow of 1

iii) 1 - 0 = 1

iv) 1 - 1= 0

الخطوة (**ii**) تعني أنه بعد عملية الطرح 1 - 0 يمكن استعارة 1 من العمود التالي مباشرة مع تطبيق القواعد الثلاث الأخرى أيضاً.

مثال (١٥): أوجد نتيجة الطرح (6 - 13) وذلك باستخدام طريقة الطرح الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 13 يكافئ العدد الثنائي $[1101]_2$.

كما أن العدد 6 يكافئ العدد الثنائي $[110]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الطرح الثنائي كالآتي:

	①	①		
	1	1	0	1
-	0	1	1	0
	0	1	1	1

أي أن نتيجة الطرح هي $[111]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[7]_{10}$ في النظام العشري.

مثال (١٦): احسب الفرق بين العددين (9 , 15) وذلك باستخدام طريقة الطرح الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 15 يكافئ العدد الثنائي $[1111]_2$.

كما أن العدد 9 يكافئ العدد الثنائي $[1001]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الطرح الثنائي كالآتي:

	1	1	1	1
-	1	0	0	1
	0	1	1	0

أي أن نتيجة الطرح هي $[110]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[6]_{10}$ في النظام العشري.

٣/٦- الطرح الثنائي باستخدام العدد المكمل

Binary Subtraction Using Complement Number

العدد المكمل لعدد ثنائي هو عملية تغيير الرقم الثنائي من 0 إلى 1 $(0 \rightarrow 1)$ أي أن (1 يحل محل 0) أو من 1 إلى 0 $(1 \rightarrow 0)$ أي أن (0 يحل محل 1). وفي الحقيقة يمكن استخدام المكملات لتحويل عملية الطرح إلى عملية جمع. وهذا مفيد لأنه يجنب عملية الاستعارة المتكررة من عمود لآخر. ولكي تتم عملية الطرح باستخدام المكمل، نتبع الخطوات الآتية:

✪ إيجاد العدد المكمل للعدد ذات الإشارة السالبة.

✪ إتمام عملية الجمع طبقاً لقواعد الجمع الثنائي (العدد الموجب + العدد المكمل).

✪ نتيجة الجمع لها احتمالين هما:

♦ أن يكون الناتج لآخر رقم بباقٍ، وفي هذه الحالة يضاف هذا الباقي إلى ناتج الجمع، ويكون الناتج عبارة عن ناتج الطرح. وناتج هذا الطرح في هذه الحالة يكون موجب.

♦ أن يكون ناتج الجمع لآخر رقم بدون باقٍ، وفي هذه الحالة نوجد المكمل لناتج الجمع، ويكون الناتج عبارة عن ناتج الطرح. وناتج الطرح في هذه الحالة يكون سالب.

مثال (١٧): أوجد ناتج الطرح (9 - 17) مستخدماً العدد المكمل للعدد الثنائي.

الحل

حيث أن العدد 17 يكافئ العدد الثنائي $[10001]_2$.

كما أن العدد 9 يكافئ العدد الثنائي $[1001]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الطرح الثنائي كالآتي:

```
                                         ①
   1  0  0  0  1                    1   0   0   0   1
-  0  1  0  0  1   Complement →     1   0   1   1   0
  ______________                 ______________________
                                        ①   ①   ①
                                 1  0   0   1   1   1
                           +  (1) ──────────────────→ 1
                                 ______________________
                                    0   1   0   0   0
```

نلاحظ هنا أن عملية الجمع لآخر رقم بباقٍ 1. وبالتالي فإنه يضاف هذا الباقي 1 إلى ناتج الجمع. ومن ثم فإن ناتج الطرح هو $[1000]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[8]_{10}$ في النظام العشري.

مثال (١٨): أوجد ناتج الطرح (19 - 17) مستخدماً العدد المكمل للعدد الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 17 يكافئ العدد الثنائي $[10001]_2$.

كما أن العدد 19 يكافئ العدد الثنائي $[10011]_2$.

وبالتالي فإنه يمكن تطبيق قواعد الطرح الثنائي كالآتي:

	1	0	0	0	1			1	0	0	0	1
-	1	0	0	1	1	Complement →	+	0	1	1	0	0
								1	1	1	0	1

نلاحظ هنا أن عملية الجمع لآخر رقم بدون باقٍ. وبالتالي فإن المكمل لهذه النتيجة بإشارة سالبة هو نتيجة الطرح الأساسية. أي أن الناتج هو $[- 00010]_2$. وهذا الرقم يكافئ العدد $[- 2]_{10}$ في النظام العشري.

٤/٦ - الضرب الثنائي Binary Multiplication

نتم عملية الضرب الثنائي تماماً مثل عملية الضرب العادية في النظام العشري. وتحقق هذه العملية الثنائية الخواص التالية:

i) 0 * 0 = 0

ii) 0 * 1 = 0

iii) 1 * 0 = 0

iv) 1 * 1= 1

مثال (١٩): أوجد ناتج ضرب (6 * 3) وذلك باستخدام طريقة الضرب الثنائي.

الحل

حيث إن العدد 6 يكافئ العدد الثنائي $[110]_2$.

كما أن العدد 3 يكافئ العدد الثنائي $[11]_2$.

وبالتالي فإن عملية الضرب هي:

			1	1	0
*			1	1	
	①	①	1	1	0
+		1	1	0	
	1	0	0	1	0

وبالتالي فإن نتيجة الضرب هي $[10010]_2$ وهذا الرقم يكافئ العدد $[18]_{10}$ في النظام العشري.

تمارين

١ – حلل الأعداد العشرية الآتية طبقاً لقيم مواضعها:

i) $[7550]_{10}$ ii) $[25689]_{10}$ iii) $[8253]_{10}$

٢ – حوِّل الأعداد الثنائية الآتية إلى النظام العشري طبقاً لقيم مواضعها:

i) $[11101]_2$ ii) $[101101]_2$ iii) $[101010]_2$

٣ – حول الأعداد الثُمانية الآتية إلى النظام العشري طبقاً لقيم مواضعها:

i) $[1453]_8$ ii) $[153]_8$ iii) $[456]_8$

٤ – حول الأعداد السداسية عشرة الآتية إلى النظام العشري طبقاً لقيم مواضعها:

i) $[1A3C]_{16}$ ii) $[2E5]_{16}$ iii) $[ACF]_{16}$

٥ – حول الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها بالنظام الثنائي ثم تحقق من الناتج:

i) $[48]_{10}$ ii) $[149]_{10}$ iii) $[13]_{10}$

٦ – حول الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها بالنظام الثماني ثم تحقق من الناتج:

i) $[576]_{10}$ ii) $[133]_{10}$ iii) $[431]_{10}$

٧ – حول الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها بالنظام السادس عشر ثم تحقق من صحة الناتج:

i) $[5895]_{10}$ ii) $[491]_{10}$ iii) $[233]_{10}$

٨ – حول الأعداد الثنائية الآتية إلى ما يكافئها من النظام الثماني:

i) $[11000]_2$ ii) $[10010101]_2$ iii) $[11111001111]_2$

٩ – حول الأعداد الثنائية الآتية إلى ما يكافئها من النظام السادس عشر:

i) $[1011101111]_2$ ii) $[1010100110]_2$ iii) $[101010111]_2$

١٠ – أحسب نواتج الجمع التالية مستخدماً طريقة الجمع الثنائي:

i) 9 + 5 ii) 16 + 12 iii) 144 + 132

١١ – أحسب نواتج الطرح التالية مستخدماً طريقة الطرح الثنائي:

i) 12 - 13 ii) 16 - 12 iii) 13 - 6

ثم احسب نواتج الطرح مستخدماً طريقة المكمل.

١٢ – أحسب نواتج الضرب التالية مستخدماً طريقة الضرب الثنائي:

i) 5 * 8 ii) 4 * 9 iii) 7 * 4

الفصل الثاني

مبادئ المنطق الرياضي

ELEMENTARY
OF MATHEMATICAL LOGIC

مقدمة Introduction

من المؤكد أن أي شخص يأمل أن يكون ناجحاً في الرياضيات أو العلوم يجب أن يكون قادراً على التفكير الاستدلالي Inference thinking والذي يطلق عليه التفكير المنطقي Logical thinking. فالرياضيات والعلوم هما أساس قدرتنا على الإبداع السليم والحجج المنطقية. ولكن كيف نعرف ما إذا كنا قادرين على إعطاء حجة سليمة منطقياً أم لا؟

الإجابة على هذا السؤال تكمن في فرع مهم من فروع الرياضيات يعرف بالمنطق، هذا العلم يخبرنا بالقرار الصحيح والحجة المنطقية. ومن المعروف أن المنطق له تطبيقات عملية عديدة ومهمة جداً في ما يسمى تصميم دوائر المنطق والتي تُستخدم في أجهزة الحاسبات الالكترونية والمعدات الحربية الحديثة.

يرى علماء المنطق أن استخدامنا اليومي للغة يَشُوبُه بعض الغُموض، وأن تفكيرنا ليس دقيقاً بدرجة كافية، الأمر الذي يؤدي أحياناً إلى الوقوع في كثير من التناقضات، لذلك فإن أحد الأغراض الأساسية لدراسة المنطق الرياضي هو تقديم أو استعراض الطريقة المثلى للتفكير، وكذلك الدقة في التعبير عما نريده وذلك في تعاملنا اليومي مع مشاكلنا في الحياة.

لقد أصبح المنطق الرياضي في العصر الحديث موضوعاً عميقاً ومتشعباً، ومن أهم جوانبه ذلك الجزء الخاص بنظرية الجدل الصحيح Correct reasoning والتي تسمى كذلك بنظرية الاستدلال المنطقي Logical inference Theory أو نظرية البرهان Proof theory. والاستدلال المنطقي هو عملية عقلية نُجريها دائماً كل ساعة في حياتنا اليومية وذلك بعد شيء من التفكير في مقدمات الأشياء، ولقد طالبنا القرآن الكريم بمثل هذا النوع من الاستدلال المنطقي، عندما قال الله تعالى ﴿قُلْ سِيرُواْ فِي الأَرْضِ فَانظُرُواْ كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ثُمَّ اللهُ يُنشِئُ النَّشْأَةَ الأخِرَةَ إِنَّ اللهَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ﴾ (سورة العَنكَبُوت الآية ٢٠) وذلك كي يصل العقل إلى وجود الله تبارك وتعالى وإلى عظيم قدرته. إن الكثير من آيات القرآن الكريم هي دعوة إلى التفكير الصحيح العميق وإلى الاستدلال المنطقي المفيد، فنحن نقرأ كثيراً في القرآن الكريم ﴿أَفَلا تَعْقِلُونَ﴾،

﴿أَفَلا تُبْصِرُون﴾، ﴿أَفَلا تَذَكَّرُون ﴾ . . . إلى آخر هذه الآيات. أيضاً حينما ننظر إلى مبنى معين نستنتج بديهياً أن وراء قيام هذا المبنى خطوات كثيرة معمارية وهندسية وإنشائية. لذلك فإن نظرية الاستدلال المنطقي تعد العمود الفقري الآن لكل أنواع المعرفة في عصرنا الحاضر. إن أهمية أي نظرية علمية تكمن في دقتها على التنبؤ بحدوث الظاهرة المعينة بها استناداً إلى مشاهدات تُرْصَدْ قبل أن تحدث تلك الظاهرة. لذلك وحتى يكون التنبؤ صحيحاً لابد أن يكون تطبيقاً لاستدلال منطقي صائب.

إن التفكير السليم في الرياضيات يرتكز أولاً إلى سلامة الصياغة المنطقية للمعطيات المتاحة لنا، وذلك يتم عن طريق تحويل المشاهدات إلى رموز فنية يمكن التعامل معها رياضياً فيما بعد.

إن الصياغة المنطقية للظواهر والمعطيات تتم من خلال بعض كلمات مرشدة بسيطة وكذلك بعض عبارات مثل «و»، «أو»، «ليس»، «كل»، «بعض»، . . . وهكذا. بعد تلك المرحلة من الصياغة تأتي مرحلة التحليل المنطقي الدقيق، وذلك للوصول إلى تنبؤ صحيح. ولكي يكون تحليلنا للأفكار دقيقاً ومنطقياً، فإننا لا نكتفي بقدرتنا على إنشاء استدلال منطقي، ولكن يجب أن نكون قادرين على إيجاد بعض الطرق لتعريف أحد المفاهيم بطريقة دقيقة بواسطة مفاهيم أخرى. من المثمر والمنطقي في أي فرع من فروع العلوم وخاصة الرياضيات – لاستبعاد أي غموض متصور – أن نقوم بعزل عدد صغير من المفاهيم الأساسية للموضوع المعطى وتعريف بقية المفاهيم بواسطة تلك المجموعة الأساسية التي عزلناها.

هذا الفصل يلقي الضوء على بعض مبادئ المنطق الرياضي من خلال دراسة مبسطة لبعض التعريفات والمفاهيم المنطقية التي ستساعدنا على كيفية الاستفادة من تطبيقات المنطق الرياضي في كل العلوم وخاصة العلوم العسكرية.

أولاً: التقارير Statements

نشأ المنطق الرياضي في الأساس لينظم عملية التفكير والمناقشة وليخضعها لأسس موضوعية، ومن ثم فهو يتعامل مع اللغة التي تعتبر إحدى أساليب التفاهم في أي مجتمع من المجتمعات، ونعلم أن عناصر أي لغة هي الحروف التي تتكون منها الكلمات والعبارات أو الجمل، وتنقسم الجمل إلى نوعين هما:

١/١- الجملة الخبرية Declarative Sentences

وهي الجملة التي تحتمل الصواب (الصحة – التصديق) أو الخطأ (التكذيب).

مثال (١)

أ – حضر محمد اليوم. (جملة تحتمل الصواب أو الخطأ).

ب – جميع الطلاب بارعون في مادة الرياضيات. (جملة تحتمل الصواب أو الخطأ).

ج – من كثر ضحكه قلت هيبته. (جملة صائبة).

د – القدس مدينة عربية. (جملة صائبة).

٢/١- الجملة الإنشائية Non-declarative Sentences

وهي الجملة التي لا تحتمل الصواب (الصحة – التصديق) أو الخطأ (التكذيب). وتشمل الأمر والنهي والاستفهام والتعجب والنداء.

مثال (٢)

أ – اكتب الدرس يا محمد. (أمر).

ب – لا تلق الأوراق في الشارع. (نهي).

ج – أليس الصبح بقريب؟ (استفهام).

د – ما أجمل صاحب الخلق الحسن! (تعجب).

هـ – يا طالب العلم اجتهد. (نداء).

تعريف: يعرف التقرير Statement **على أنه هو الجملة الخبرية التي تحتمل الصواب أو الخطأ. وهذا النوع من الجمل هو محور دراستنا في هذا الفصل.**

إذا كان مضمون التقرير صحيحاً قلنا أنه صائب True وقيمة صوابه هي T، أما إذا كان مضمون التقرير غير صحيح قلنا أنه خاطئ False وقيمة صوابه هي F.

مثال (٣)

أ – القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية. هذا تقرير صائب قيمة صوابه T.

ب – النظام العددي الثنائي لا ينتمي لمجموعة النظم العددية. هذا تقرير خاطئ قيمة صوابه F.

عملية التفكير المنطقي لا يمكن حدوثها بدون استخدام الرموز، ويمكن استخدام طريقة الاختزال (الاختصار) الجبري في التعبير عن التقارير. سنرمز لأي تقرير بأحد الرموز ... p , q , r , s.

نعلم أنه يمكن ربط أي جملتين خبريتين بأحد أحرف العطف أو أحرف الشرط لتكوين جملة خبرية جديدة. وبالتالي فإنه يمكن ربط أي تقريرين لتكوين تقريراً جديداً.

مثال (٤)

أ – محمد يدرس الرياضيات.

ب – محمد يدرس الحاسب الآلي.

يمكن ربط التقريرين أ، ب بالحرف (و – and) لنحصل على التقرير:

محمد يدرس الرياضيات و الحاسب الآلي.

وهي جملة تحتمل الصواب أو الخطأ، ومن ثم فهي تقرير. وأيضاً يمكن ربطهما بالحرف (أو – or) لنحصل على التقرير:

محمد يدرس الرياضيات أو الحاسب الآلي.

كما تقدم فإن عناصر علم المنطق الرياضي هي التقارير بالإضافة إلى عمليات الربط بين تقريرين أو أكثر من تقريرين للحصول على تقرير جديد. وتسمى هذه العمليات بدوال الصواب (أدوات الصواب – العمليات المنطقية – أدوات الربط المنطقية) Connectives. فإذا كان التقرير الناتج عبارة تحمل خبراً واحداً فقط سمي تقريراً بسيطاً Simple statement. أما إذا حملت العبارة أكثر من خبر واحد سمي تقريراً مركباً Compound statement.

ثانياً: التقارير المركبة Compound Statements

وهي التقارير التي تتكون من تقريرين بسيطين أو أكثر بواسطة إحدى أدوات الربط التي سنتناولها تفصيلياً في ما بعد.

نعلم أن العمليات الحسابية (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة) نستخدمها عند التعامل مع الأعداد والرموز والمقادير الجبرية. وبالتالي فإنه كما تقدم توجد دوال للصواب والتي تسمى أيضاً العمليات المنطقية Logical connectives للربط بين التقارير للحصول على تقرير جديد. ومناقشة دوال الصواب هذه يسمى حساب التقارير أو حساب القضايا Statements calculus. وفي ما يلي توضيح مبسط للعمليات المنطقية:

٢/١– دالة النفي Negation Function

تعتبر دالة النفي من أبسط أنواع دوال الصواب (العمليات المنطقية). على سبيل المثال:

مقرر الرياضيات شيقاً في دراسته.

نفي هذا التقرير: مقرر الرياضيات ليس شيقاً في دراسته.

قاعدة النفي تنص على ما يلي:

إذا كان **p** تقريراً صائباً. فإن نفيه والذي يرمز له بالرمز $\neg p$ تقريراً خاطئاً. والعكس صحيح. ويمكن توضيح هذه القاعدة في جدول الصواب الآتي:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T

٢/٢– دالة الوصل Conjunction Function

هي العملية التي تربط بين تقريرين للحصول على تقرير جديد، سنتفق على أنه صائباً دائماً إذا كان كل من التقريرين صائباً. ونرمز لهذه العملية والتي تسمى أيضاً بدالة الوصل (الضم) بالرمز $\wedge$ وتقرأ and (و). فإذا كان p و q تقريرين، فإن التقرير المركب الذي يرتبط بالرمز $\wedge$ يكتب بالشكل $p \wedge q$. ويوضح مثال (٤) هذه القاعدة والتي يبينها جدول الصواب الآتي:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

٢/٣- دالة الفصل Disjunction Function

هي العملية التي تربط بين تقريرين للحصول على تقرير جديد، سنتفق على أنه صائباً دائماً إذا كان تقريرا واحدا على الأقل من التقريرين صائبا، ويعتبر غير صائب فقط إذا كان كل من التقريرين غير صائب. ونرمز لهذه العملية بالرمز $\vee$ وتقرأ or (أو). فإذا كان p و q تقريرين، فإن التقرير المركب الذي يرتبط بالرمز $\vee$ يكتب بالشكل $p \vee q$. ويوضح مثال (٤) هذه القاعدة والتي يبينها جدول الصواب الآتي:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال (٥): أوجد جدول الصواب لكل من التقارير الآتية:

$1)\ p \vee \neg p$, $2)\ p \wedge \neg p$

$3)\ p \vee \neg q$, $4)\ \neg p \wedge q$

$5)\ (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$, $6)\ (p \wedge q) \vee \neg q$

$7)\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, $8)\ (p \vee q) \wedge \neg q$

$9)\ (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$, $10)\ (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$11)\ (p \wedge q) \vee q$, $12)\ \neg (p \wedge q)$

$13)\ \neg (p \vee q)$

الحل متروك للقارئ.

٢/٤ – دالة الشرط Conditional Function

يمكن التعبير عن دالة الشرط بأداة الربط → وتقرأ (إذا كان . . . فإن) أو (If . . . then)، وذلك للربط بين تقريرين للحصول على تقرير جديد. إذا كان p و q تقريرين، فإن التقرير المركب (دالة اللزوم Implicative function – دالة الاستنتاج) الذي يرتبط بالرمز → يكتب بالشكل $p \to q$ ، ويقرأ (p تستلزم q) أو (p تؤدي إلى q) أو (إذا كان p فإن q) أو (If p then q)، ويكون التقرير $p \to q$ خاطئاً فقط إذا كان التقرير p صائباً بينما التقرير q خاطئاً. وفي ما عدا ذلك يكون التقرير $p \to q$ دائما صائباً. على سبيل المثال:

- إذا نجح محمد في المستوى الثاني فإنه سوف ينتقل إلى المستوى الثالث.
- فإذا أنزلنا عليها الماء اهتزت وربت.

ويوضح جدول الصواب الآتي دالة الشرط المنطقية:

p	q	$p \to q$
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*T*
F	*F*	*T*

٢/٥ – الدالة الشرطية المزدوجة Biconditional Function :

يمكن التعبير عن هذه الدالة بأداة الربط ↔ وتقرأ (إذا وفقط إذا) أو (If and only if) وتختصر iff، وذلك للربط بين تقريرين للحصول على تقرير جديد. إذا كان p و q تقريرين، فإن التقرير المركب (دالة التكافؤ Equivalent function – دالة اللزوم المشترك Coimplicative function) الذي يرتبط بالرمز ↔ يكتب بالشكل $p \leftrightarrow q$ ، ويقرأ (p تؤدي إلى q، و q تؤدي إلى p) أو (p إذا وفقط إذا كان q) أو (p if and only if q)، وهذا يكافئ القول (التقرير p هو الشرط الضروري والكافي للتقرير q). ويكون التقرير $p \leftrightarrow q$ صائبا إذا كان كل من التقريرين له نفس القيمة.ويوضح جدول الصواب الآتي الدالة الشرطية المزدوجة:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال (٦): أوجد جدول الصواب للتقرير المركب التالي:

$(p \to q) \wedge (q \to p)$

الحل

جدول الصواب لهذا التقرير هو:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

من الجدول يتضح أن التقرير $(p \to q) \wedge (q \to p)$ له نفس قيم الصواب للتقرير $p \leftrightarrow q$.

مثال (٧): أوجد جدول الصواب للتقرير المركب التالي:

$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$

الحل

جدول الصواب لهذا التقرير هو:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \to q$	$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T

ثالثاً: القوانين Tautologies

يقال للتقرير المركب أنه قانون إذا كان صائباً منطقيـــاً true Logically دائمـــاً بغض النظر عن قيمة الصواب لمكوناته.

مثال (٨): أثبت أن التقرير المركب التالي يمثل قانون:

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

الحل

جدول الصواب لهذا التقرير هو:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

نلاحـــظ من العمود الأخير المظلل في الجدول أن التقرير دائماً صائب، وبالتالي فهو يمثل قانون.

رابعاً: التناقض Contradiction

يقال للتقرير المركب أنه تناقض إذا كان خاطئا منطقياً Logically false دائما بغض النظر عن قيمة الصواب لمكوناته. كما يقال أن التقرير المركب مخلوطا Contingency إذا لم يكن قانوناً ولا تناقضا.

مثال (٩): أثبت أن التقرير المركب التالي يمثل تناقض:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

الحل

جدول الصواب لهذا التقرير هو:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

نلاحظ من العمود الأخير المظلل في الجدول أن التقرير دائما خاطئ، وبالتالي فهو يمثل تناقض.

ملاحظة

إذا كان التقرير المركب A قانونا فإن نفيه $\neg A$ يكون تناقضا، والعكس صحيح.

خامساً: التكافؤ المنطقي Logical Equivalent

يقال للتقريرين المركبين A و B أنهما متكافئان منطقياً إذا كان لهما نفس قيم الصواب مهما كانت قيم الصواب لمكونات كل منهما. ويرمز لتكافؤ التقريرين A و B بالرمز $A \equiv B$. ويقرأ التقرير A يكافئ منطقياً التقرير B.

مثال (١٠): أثبت صحة التكافؤ المنطقي التالي:

$$(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

الحل

لإثبات صحة التكافؤ المنطقي نكون جدول الصواب التالي:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	F

نلاحظ من الجدول أن العمودين المظللين لهما نفس قيم الصواب. وبالتالي فإن:

$$(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

ملاحظة:

يقال للتقريرين المركبين A و B أنهما متكافئان منطقياً إذا وفقط إذا كان $A \leftrightarrow B$ يمثل قانونا. أي أن $A \equiv B$ إذا وفقط إذا كان $A \leftrightarrow B$ يمثل قانوناً.

من بيانات مثال (١٠) نجد أن $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ يمثل قانونا، وذلك لأن $(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

سادساً: الاقتضاء المنطقي Logical Implication

يقال للتقرير المركب A أنه يقتضي منطقيا التقرير المركب B ويكتب $A \Rightarrow B$ إذا كان التقرير المركب $A \rightarrow B$ يمثل قانوناً. كما يقال أن التقارير المركبة $A_1, A_2, \cdots A_n$ تقتضي منطقياً التقرير المركب B ويكتب $A_1, A_2, \cdots A_n \Rightarrow B$ إذا كان التقرير المركب $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ يمثل قانونا.

مثال (١٠): أثبت أن:

$$\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$$

الحل

لإثبات صحة ذلك نكون جدول الصواب التالي:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

نلاحظ من العمود الأخير المظلل في الجدول أن التقرير دائما صائب، وبالتالي فهو يمثل قانون. ومن ثم فإن $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$.

سابعاً: خواص العمليات المنطقية

Logical Connectives Properties

إذا كان p , q , r ثلاثة تقارير، فإن العمليات المنطقية تحقق الخواص التالية:

١ – قانونا الثبات (الجمود) Idempotent Laws

$i)\, p \wedge p \equiv p$,

$ii)\, p \vee p \equiv p$

٢ – قانونا الإبدال Commutative Laws

$i)\, p \wedge q \equiv q \wedge p$,

$ii)\, p \vee q \equiv q \vee p$

٣ – قانونا الدمج (التجميع) Associative Laws

$i)\, (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$ii)\, (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

٤ – قانونا التوزيع Distributive Laws

$i)\, p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$ii)\, p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

٥ – قانونا ديمورجان DeMorgan's Laws

$i)\, \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$ii)\, \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

٦ – قوانين الوحدة والشمول Identity and Universal Laws

$i)\, p \wedge T \equiv p$,

$ii)\, p \vee T \equiv T$,

$iii)\ p \wedge F \equiv F$,

$iv)\ p \vee F \equiv p$

٧ – قوانين النفي Negation Laws

$i)\ p \wedge \neg p \equiv F$,

$ii)\ p \vee \neg p \equiv T$

$iii)\ \neg(\neg p) \equiv p$,

$iv)\ \neg T \equiv F$

$v)\ \neg F \equiv T$

٨ – قانونا الامتصاص Absorption Laws

$i)\ p \wedge (p \vee q) \equiv p$,

$ii)\ p \vee (p \wedge q) \equiv p$

٩ – قوانين دالة الشرط Conditional Function Laws

$i)\ p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$ii)\ \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

$iii)\ p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$iv)\ p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r \equiv (p \wedge \neg r) \rightarrow q$

$v)\ (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$vi)\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

١٠ – قوانين الدالة الشرطية المزدوجة Biconditional Function Laws

$i)\ (p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv q \leftrightarrow p$

$ii)\ (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$iii)\ (p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$iv)\ \neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$

$v)\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

إثبات صحة هذه الخواص متروك للقارئ.

مثال (١١): بدون استخدام جدول الصواب أثبت صحة التقرير المركب التالي:

$\neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \equiv \neg p \vee \neg q$

الحل

نحاول إثبات صحة هذا التقرير باستخدام خواص العمليات المنطقية كالآتي:

$L.H.S. \equiv \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \equiv \neg p \vee \neg(\neg p \vee q)$ (قانون ديمورجان)

$\equiv \neg p \vee (\neg\neg p \wedge \neg q)$ (قانون ديمورجان)

$\equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q)$ (قانون نفي النفي)

$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (قانون التوزيع)

$\equiv T \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (قانون النفي)

$\equiv \neg p \vee \neg q \equiv R.H.S.$ (قانون الوحدة)

مثال (١٢): بدون استخدام جدول الصواب أثبت أن لتقرير المركب الآتي يمثل قانوناً:

$A \equiv [(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

الحل

نحاول إثبات صحة هذا التقرير باستخدام خواص العمليات المنطقية كالآتي:

$A \equiv [(p \vee q) \wedge \{(p \vee q) \to r\}] \to r$ (قوانين الدالة الشرطية)

$\equiv [(p \vee q) \wedge \{\neg(p \vee q) \vee r\}] \to r$ (قوانين الدالة الشرطية)

$\equiv [\{(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)\} \vee \{(p \vee q) \wedge r\}] \to r$ (قانون التوزيع)

$\equiv [F \vee \{(p \vee q) \wedge r\}] \to r$ (قانون النفي)

$\equiv [(p \vee q) \wedge r] \to r$ (قانون العنصر المحايد)

$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge r] \vee r$ (قوانين الدالة الشرطية)

$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg r] \vee r$ (قانون ديمورجان)

$\equiv \neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee r)$ (قانون التجميع)

$\equiv \neg(p \vee q) \vee T \equiv T$

وبالتالي فإن التقرير المركب A صائب دائماً، ومن ثم فهو يمثل قانوناً.

تمارين

١ – أيٌّ من التقارير المركبة التالية يمثل قانوناً، وأيها يمثل تناقضاً، وأيها يكون مخلوطاً؟

$1)(p \wedge q) \wedge (p \to q)$

$2)(p \wedge q) \to q$

$3)(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$

$4) \neg(p \vee q) \to (\neg p \vee q)$

$5) [(p \vee \neg q) \to r] \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

$6)(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

$7)(p \wedge q) \to p$

$8) \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$9) \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$10)(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \to p)$

$11)(p \to q) \to (p \wedge q)$

$12) \neg p \to (q \to p)$

$13)(p \to q) \vee \neg(q \leftrightarrow \neg q)$

$14)[p \wedge (\neg q \to p)] \wedge [(p \leftrightarrow \neg q) \to (q \vee \neg p)]$

$15)[q \leftrightarrow (r \to \neg p)] \vee [(\neg q \to p) \leftrightarrow r]$

$16)[p \leftrightarrow (p \wedge \neg p)] \leftrightarrow \neg p$

$17)(p \to q) \to [(q \leftrightarrow r) \to (p \to r)]$

$18)(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$19)[(p \vee r) \vee (q \wedge \neg r)] \leftrightarrow [(\neg p \wedge r) \vee (\neg q \vee \neg r)]$

$20) p \leftrightarrow [q \leftrightarrow \{p \leftrightarrow (q \to p)\}]$

$21) q \wedge \neg(p \vee q)$

$22)\ [p \to (q \wedge \neg q)] \to \neg p$

$23)\ [p \leftrightarrow (p \to q)] \wedge (p \to r)$

٢ – أثبت صحة ما يلي:

$1)\ (p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

$2)\ p \to (q \to r) \equiv (p \to \neg r) \to \neg q$

$3)\ (p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

$4)\ p \to (q \vee r) \equiv \neg q \to (\neg p \vee r)$

$5)\ \neg[p \wedge (q \vee r)] \equiv (p \to \neg q) \wedge (p \to \neg r)$

$6)\ (p \wedge q) \leftrightarrow p \equiv (p \to q)$

$7)\ (p \to q) \wedge (p \to \neg q) \equiv \neg p$

$8)\ \neg(q \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg[(p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)]$

$9)\ (r \wedge \neg p) \wedge [(r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)] \equiv r \wedge \neg p$

$10)\ [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)] \to \neg(p \vee q) \equiv (p \vee q) \to (p \wedge q)$

$11)\ (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv r$

٣ – بسط كلاً من التقارير التالية:

$1)\ \neg(\neg p \to \neg q)$

$2)\ \neg(p \leftrightarrow \neg q)$

$3)\ \neg(\neg p \leftrightarrow q)$

$4)\ \neg(p \wedge \neg q)$

$5)\ \neg(p \vee \neg q)$

$6)\ \neg(\neg p \vee \neg q)$

$7)\ (p \vee q) \wedge \neg p$

$8)\ p \vee (p \wedge q)$

$9)\ \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

الفصل الثالث

مقدمة في نظرية المجموعات

AN INTRODUCTION TO SET THEORY

مقدمة Introduction

نظرية المجموعات Set theory – التي بدأت معالجتها الحديثة عام ١٨٩٥ م – تعتبر ذات أثر كبير في تهيئة لغة مشتركة تُعرف بلغة المجموعات التي ساهمت في معالجة التركيبات والنظم الرياضية، وقد أدى ذلك إلى وحدة الرياضيات برغم تعدد فروعها.

يعتبر مفهوم المجموعة أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات المعاصرة التي يصعب تعريفها بشكل دقيق إلا أنه يمكن إدراكها حدسياً باعتبارها تمثل تجمعاً من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفاً تاماً، فهذا المفهوم هو حجر الأساس للبناء الرياضي كله، والذي يترتب عليه الكثير من المُعَرَّفات الأساسية في عِلم الرياضيات. ليس هذا فحسب، بل أنه يسهم وبشكل فَعَّال في معالجة الكثير من الأمور التطبيقية ويجعلها أشد وضوحاً وأكثر تحديداً. ويعتبر العالم الرياضي الألماني المشهور چورچ كانتور (١٨٤٥ – ١٩١٨ م) George Cantor مؤسس نظرية المجموعات الحقيقي عند دراسته لمتسلسلات الدوال المثلثية.نظراً لأهمية دراسة المجموعات، سنتناول في هذا الفصل الملامح الرئيسية لها مع ما يترتب على ذلك من رموز ومصطلحات ومفاهيم أساسية.

أولاً: المجموعة The Set

تُعرف المجموعة بديهياً على أنها أي تجمع من الأشياء Objects أياً كـان، هذه الأشياء تكون معرفة تعريفاً جيداً (محددة تحديداً تاماً)، ويوجد بين هذه الأشياء صفات مميزة مشتركة. تسمى هذه الأشياء عناصر Elements المجموعة. التعبير معرفة تعريفاً جيداً، يعني تحديد ما إذا كانت العناصر تنتمـي إلـى Belongs to المجموعة أم لا تنتمي.

على سبيل المثال

الطلاب الأذكياء في إحدى الشعب، لا تُعتبر مجموعة، لأن الطلاب الأذكيـاء لا يمكن تحديدهم تحديداً تاماً، ويمكن أن يختلف عليها الكثيرون، لأن الطالب الذكي بالنسبة لأحد الأساتذة يمكن أن يكون أقل ذكاءً بالنسبة لأستاذ آخر. أي أن الـذكاء ليس له مقياس محدد.

مثال (١)

أ – مجموعة طلاب كلية الملك عبد الله للدفاع الجوي.

ب – مجموعة الحروف الأبجدية في اللغة العربية.

ج – مجموعة شهور السنة الهجرية.

د – مجموعة لاعبي كرة القدم بالمنتخب السعودي.

هـ – مجموعة الخلفاء الراشدين رضي الله عنهم وأرضاهم أجمعين.

عادة يُرمز للمجموعة بأحد الأحرف اللاتينية الكبيرة:

$A, B, C, D, X, Y, Z, \ldots$

أما العناصر التي تحتويها المجموعة يُرمز لها بالأحرف الصغيرة:

$a, b, c, d, x, y, z, \ldots$

١/١– مبدأ الانتماء Belonging Rule

إذا كان العنصر a هو أحد عناصر المجموعة A مثلاً، فإننا نقول أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A (a مُحْتَوَى في المجموعـة A – a belongs to A)

وتكتب $a \in A$. أما إذا كان العنصر a ليس أحد عناصر المجموعة A مثلاً، فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A (a غير موجود في المجموعة A – a does not belong to A) وتكتب $a \notin A$.

١/٢– طرق كتابة المجموعة Methods of Writing Set

عادة تُكتب عناصر المجموعة بين قوسين من النوع { }، ويوجد طريقتان تُستَخدَمان للتعبير عن المجموعة ألا وهما:

١/٢/١– طريقة القائمة The Listing Method

يطلق على هذه الطريقة أيضاً (طريقة السرد – طريقة الحصر – الطريقة المطولة – طريقة المفردات – الطريقة التحليلية – طريقة جدولة العناصر)، وتعتمد هذه الطريقة على كتابة جميع عناصر المجموعة بين القوسين { }، أو كتابة بعض عناصر المجموعة بين القوسين { } لإمكان استنتاج بقية العناصر، ونضع بين كل عنصر والآخر فصلة بالشكل « , ». ويفضل استخدام هذه الطريقة إذا كان عدد عناصر المجموعة صغيراً. وعند كتابة عناصر المجموعة يجب مراعاة عدم تكرار العناصر، وأيضاً دون ترتيب.

مثال (٢)

أ – مجموعة سور القرآن الكريم A مثلاً هي:

A = { الفاتحة , البقرة , آل عمران , ... , الفلق , الناس }

ب – مجموعة الأعداد الطبيعية Natural numbers (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Positive integer numbers) والتي يرمز لها بالرمز N هي:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ونجد أن $4 \in N$، كما أن $-1 \notin N$.

٢/٢/١– طريقة الصفة المميزة Method of Characteristic

تسمى هذه الطريقة أيضاً (طريقة التقرير – طريقة الخاصية المميزة – الطريقة

المختصرة)، وهذه الطريقة تعتمد على كتابة جملة (تقرير) بين القوسين { } تصف عناصر المجموعة، ولا تصح إلاّ عليها فقط. كما تعتمد هذه الطريقة على تحديد الصفة التي تُحدد انتماء العنصر إلى المجموعة أم لا ينتمي، ونرمز لهذه الصفة بالتقرير *p*. وتُعتبر هذه الطريقة هي الطريقة الشائعة والمستخدمة، وتكتب رياضياً على الصورة:

{ x لها الخاصية *x: p* }

وتقرأ مجموعة العناصر *x* حيث أن *x* لها الخاصية **p**.

مثال (٣):المجموعات التالية:

$$i)\ A=\{x : x\in N \quad , \quad x\le 5\}$$
$$ii)\ B=\{x : 3\le x\le 7 \quad , \quad x\in N\}$$
$$iii)\ Z=\{x : \text{عدد صحيح} \quad x\}$$

مكتوبة بطريقة الصفة المميزة، ويمكن التعبير عنها بطريقة القائمة كالآتي:

$$i)\ A=\{1,2,3,4,5\}$$
$$ii)\ B=\{3,4,5,6,7\}$$
$$iii)\ Z=\{\cdots ,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ \cdots\}$$

حيث *Z* تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.

ثانياً: المجموعات العددية Numerical Sets

لكثرة استخدامنا لبعض المجموعات العددية، نقوم بتعريف مختصر للأكثر منها شيوعاً واستخداماً كما يلي:

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية Natural numbers هي:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5 \cdots\}$$

٢ – مجموعة الأعداد الكلية Whole numbers والتي تُسَمى أيضاً مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة Non-Negative integer numbers هي:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \cdots\}$$

٣ – مجموعة الأعداد الصحيحة Integer numbers هي:

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

٤ – مجموعة الأعداد النسبية (القياسية – الكسرية) Rational numbers هي:

$$Q = \left\{x : x = \frac{a}{b}\ ,\ a, b \in Z\ ,\ b \neq 0\right\}$$

٥ – مجموعة الأعداد غير النسبية (غير القياسية) Irrational numbers والتي يرمز لها بالرمز I هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ومن عناصر هذه المجموعة:

$$\sqrt{2} = 1.414213562, \sqrt{3} = 1.732050808, \pi = 3.141592654, e = 2.718281828$$

٦ – مجموعة الأعداد الحقيقية Real numbers وهي المجموعة التي تحوي كل الأعداد النسبية وغير النسبية أي أن:

$$R = \{x : -\infty < x < \infty\}$$

٧ – مجموعة الأعداد المركبة Complex numbers هي:

$$C = \{x : x = a + ib\ ,\ a, b \in R\}$$

حيث أن المقدار i يعرف بالشكل $i = \sqrt{-1}$.

مثال (٤): المجموعات التالية مكتوبة بطريقة الصفة المميزة، عبر عنها بطريقة القائمة:

$i)\ A=\{x : x \in Z \quad , \quad 5 < x \leq 10\}$

$ii)\ B=\{x : x \in N \quad , \quad x \text{ عدد زوجي}\}$

$iii)\ C=\{x : x \in N \quad , \quad x \text{ تقبل القسمة على } 5\}$

مثال (٥): اكتب بطريقة الصفة المميزة المجموعات التالية:

$i)\ A=\{2,4,6,8,10, \quad \cdots \quad ,100\}$

$ii)\ B=\{1,3,5,7,19, \quad \cdots \quad ,29\}$

$iii)\ C=\{3,6,9,112, \ \ldots\}$

حل المثالين متروك للقارئ.

ثالثاً: المجموعات المنتهية وغير المنتهية

Finite and Infinite Sets

إذا كانت المجموعة A يمكن حصر عناصرها، أي تتكون من عدد محدود من العناصر سميت مجموعة منتهية، ويسمى عدد عناصر A بالعدد الرئيسي Cardinal number. ويمكن التعبير عن عدد عناصر المجموعة بالرمز $|A|$ أو $n(A)$. أما إذا كانت المجموعة لا يمكن حصر عناصرها، أي تتكون من عدد غير محدود من العناصر سميت مجموعة غير منتهية (لا نهائية).

نلاحظ من مثال (٥) أن المجموعتين A , B منتهيتين وعدد عناصرهما على الترتيب هو $|A| = 50, |B| = 15$. كما أن المجموعة C هي مجموعة غير منتهية. وأيضاً المجموعات العددية جميعها مجموعات غير منتهية.

رابعاً: المجموعة الخالية The Empty Set

المجموعة الخاليــة (المجموعــة الخاويــة Void set – Null set) هــي المجموعة التي لا تحتوي على أي عناصر، ويرمز لها بالرمز Φ وتقرأ « فاي » وهو حرف من الأبجدية اليونانية.

ويمكن كتابة هذه المجموعة أيضاً على الصورة $\{\ \}$.

ملاحظة:

يجب أن نلاحظ أن هناك فرق بين كلٍ من $\{\Phi\}$، Φ، $\{0\}$، 0. حيث أن:

- ♦ $\{\Phi\}$ هي مجموعة تحتوي على المجموعة الخالية Φ،
- ♦ Φ هي المجموعة الخالية نفسها حسب التعريف،
- ♦ $\{0\}$ هي مجموعة تحتوي على الرقم 0،
- ♦ 0 هو الرقم صفر وليس مجموعة.

مثال (٦): المجموعات التالية هي تعبير عن المجموعات الخالية:

١ – مجموعة الطلاب الأميين الذين يدرسون بالجامعة.

٢ – مجموعة الجنود الذين تقل أعمارهم عن سنتين.

٣ – مجموعة شهور السنة الهجرية التي يقل عدد أيامها عن 28 يوماً.

٤ – مجموعة الأيام التي يزيد فيها اليوم عن 24 ساعة.

خامساً: المجموعة الأحادية The Singleton Set

المجموعة الأحادية (المفردة – وحيدة العنصر) هي المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد فقط. فمثلاً المجموعات $\{1\}$، $\{x\}$، $\{0\}$، $\{100\}$ كلها مجموعات أحادية.

مثال (٧): المجموعات التالية هي مجموعات مفردة:

١ – مجموعة قادة كلية الملك عبد الله للدفاع الجوي الحاليين.

٢ – مجموعة المساجد التي تحتوي على الكعبة المشرفة.

٣ – مجموعة رؤساء جامعة الطائف الحاليين.

سادساً: المجموعات الجزئية The Subsets

يقـــال أن A مجموعـــة جزئية من المجموعـــة B (A is a subset of B) وتكتب على الصورة $A \subset B$ إذا كان كل عنصر في المجموعة A موجود أيضاً داخل المجموعة B. كما يقال أيضاً أن المجموعة A محتواة داخل المجموعـــة B (A is contained in B). أو أن B تحتـــوي A (B is *a* superset of A) وتكتب $A \subset B$. كما يُطْلَق على الرمز « $\subset$ » رمز الاحتواء Inclusion.

أمـــا إذا كانت A ليســـت مجموعـــة جزئيـــة (ليـــست محتـــواة) مـــن B فتُكْتَب $A \not\subset B$. ويُعْرف الاحتواء رياضياً كالآتي:

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$or \quad A \subset B \leftrightarrow (\forall x \notin B \rightarrow x \notin A)$$

الرمز $\forall$ يَعني الشمول ويُقْرأ « لكل – لجميع – لأي – for every – for all ».

كما أن:

$$A \not\subset B \leftrightarrow (\exists\, x \in A \wedge x \notin B)$$

الرمز $\exists$ يَعني رمز الوجود ويُقْرأ « يوجد there exists ».

ملاحظة

هناك فرق كبير بين رمز الانتماء $\in$، ورمز الاحتواء $\subset$. فمفهوم الانتمـــاء هو العلاقة بين العناصر والمجموعات، أما مفهوم الاحتواء (المجموعات الجزئية) فهو العلاقة بين المجموعات وبعضها.

مثال (٨)

أ – إذا كان $B = \{0,1,3,4,a,b\}$ ، $A = \{1,4,a\}$ ، فإن $A \subset B$.

ب – من تعريف المجموعات العددية نجد أن $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

ج – مجموعة طلاب السنة الإعدادية مجموعة جزئية من مجموعة طـــلاب كليـــة الملك عبد الله للدفاع الجوي.

د – المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة A. أي أن $\Phi \subset A$.

هـ – أي مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها. أي أن $A \subset A$.

سابعاً: المجموعات المتساوية The Equality of Sets

يقال أن المجموعتين B , A متساويتين، إذا كانت المجموعة A تحتوي كل عناصر المجموعة B، كما أن كل عناصر المجموعة A محتواة داخل المجموعة B. وتكتب على الصورة $A = B$. أي أن:

$$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

بمعنى آخر كل عنصر ينتمي إلى المجموعة A يكون أيضاً منتمياً إلى المجموعة B، كما أن كل عنصر ينتمي إلى المجموعة B يكون أيضاً منتمياً إلى المجموعة A. أي أن:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \rightarrow x \in A)$$

مثال (٩)

١ - المجموعتان $A = \{2,4,6,8\}$ ، $B = \{8,4,6,2\}$ متساويتان.

٢ - المجموعتان $A = \{3,4,5\}$ ، $B = \{x : 3 \le x \le 5 , x \in Z\}$ متساويتان.

ثامناً: مجموعة القوة The Power Set

تسمى المجموعة التي كل عناصرها هي كل المجموعات الجزئية من أي مجموعة A بمجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة A. أو مجموعة القوة للمجموعة A. والتي يرمز لها بالرمز $P(A)$.

مثال (١٠)

أ – مجموعة القوة للمجموعة Φ تحتوي على مجموعة جزئية واحدة، هي:

$$P(\Phi)=\{\Phi\}$$

ب – مجموعة القوة للمجموعة $A=\{1\}$ تحتوي على مجموعتان جزئيتان، هي:

$$P(A)=\{\Phi,\{1\}\}=\{\Phi,A\}$$

ج – مجموعة القوة للمجموعة $A=\{1,2\}$ تحتوي على أربع مجموعات جزئية، هي:

$$P(A)=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=\{\Phi,\{1\},\{2\},A\}$$

د – مجموعة القوة للمجموعة $A=\{1,2,3\}$ تحتوي على ثمان مجموعات جزئية، هي:

$$P(A)=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$$

نظرية

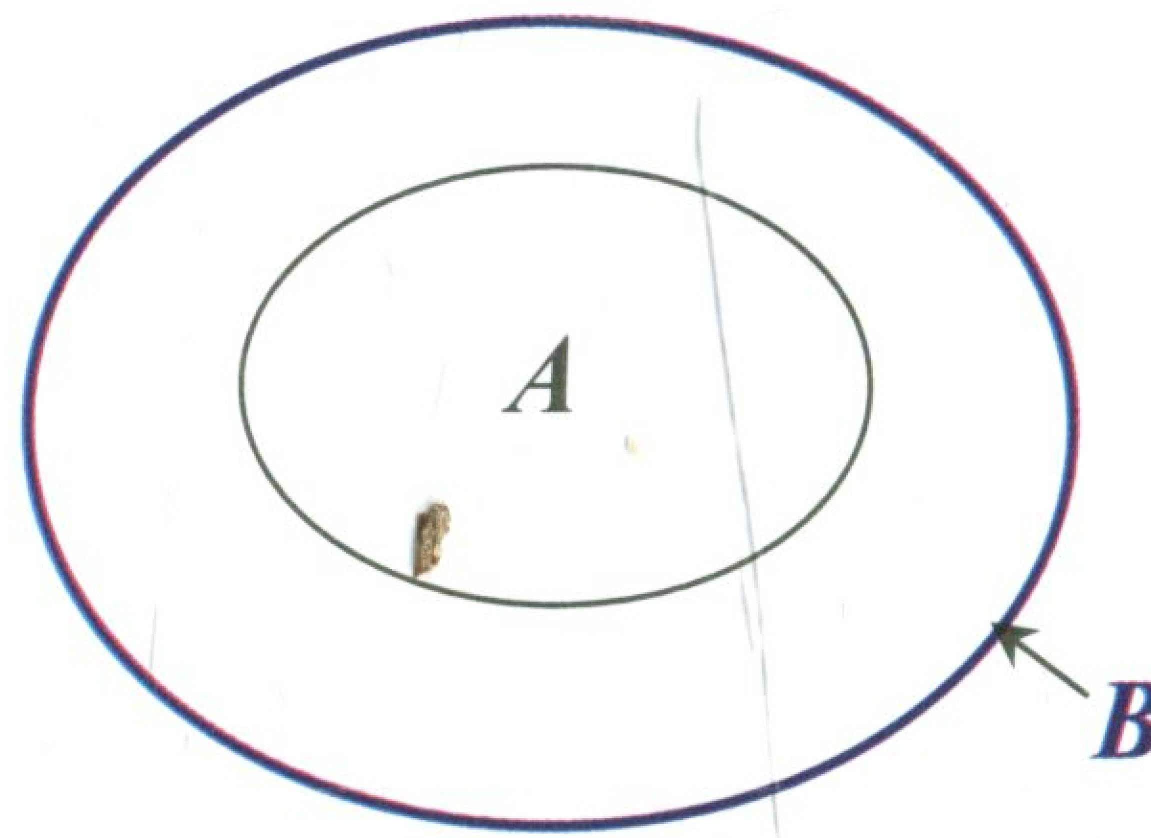
إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها n، فإن عدد عناصر مجموعة القوة للمجموعة A $(|P(A)|)$ يساوي 2^n عنصراً. أي أن:

$$|P(A)|=n[P(A)]=2^n$$

البرهان متروك للقارئ.

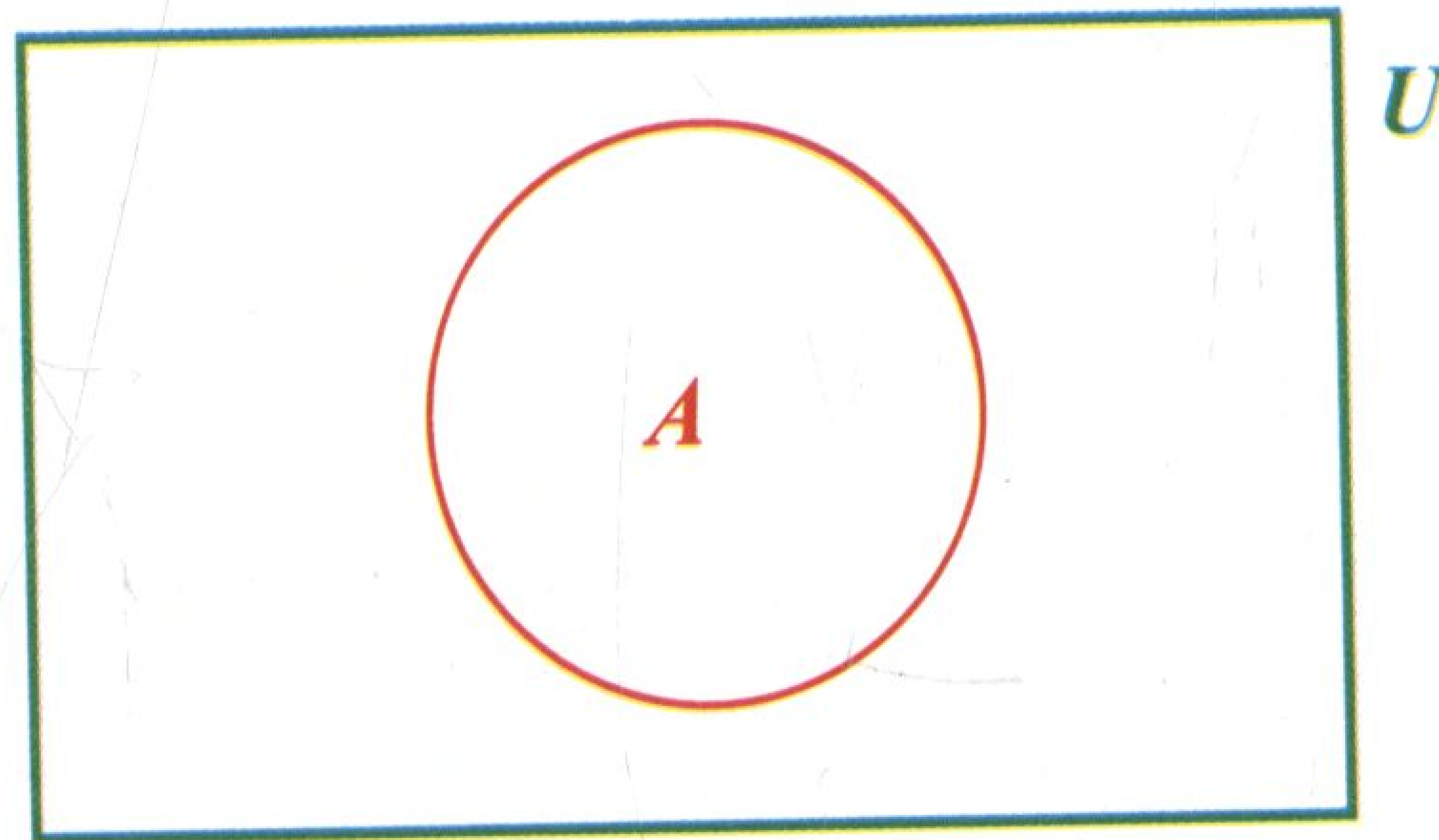
تاسعاً: أشكال ڤن Venn Diagrams

يمكن تمثيل المجموعات بواسطة أشكال أو مخططات توضيحية تساعد على فهم العلاقات بين المجموعات والعمليات التي تُجْرَى عليها والتي سيتم دراستها لا حقاً. تسمى هذه الأشكال أو المخططات « أشكال ڤن » نسبة إلى العالم الرياضي الإنجليزي چون ڤن (1834 – 1923) John Venn، والذي يعتبر أول من استخدم الأشكال الهندسية (دوائر – مستطيلات – أشكال بيضاوية – أو خلافه) لتمثيل المجموعات. ويمكن توضيح مفهوم الاحتواء $A \subset B$ بشكل ڤن التالي:



عاشراً: المجموعة الشاملة The Universal Set

عندما نكون بصدد دراسة مجموعات جزئية من مجموعة غير خالية يرمز لها بالرمز U، فإننا نسمي المجموعة U بالمجموعة الشاملة. أي أن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تضم جميع عناصر المجموعات المتعامل معها (محل الدراسة). ويمكن تمثيل المجموعة الشاملة بشكل ڤن على هيئة مستطيل. وشكل ڤن للمجموعة A يمكن تمثيله كما يلي:



الحادي عشر: العمليات على المجموعات Operations On Sets

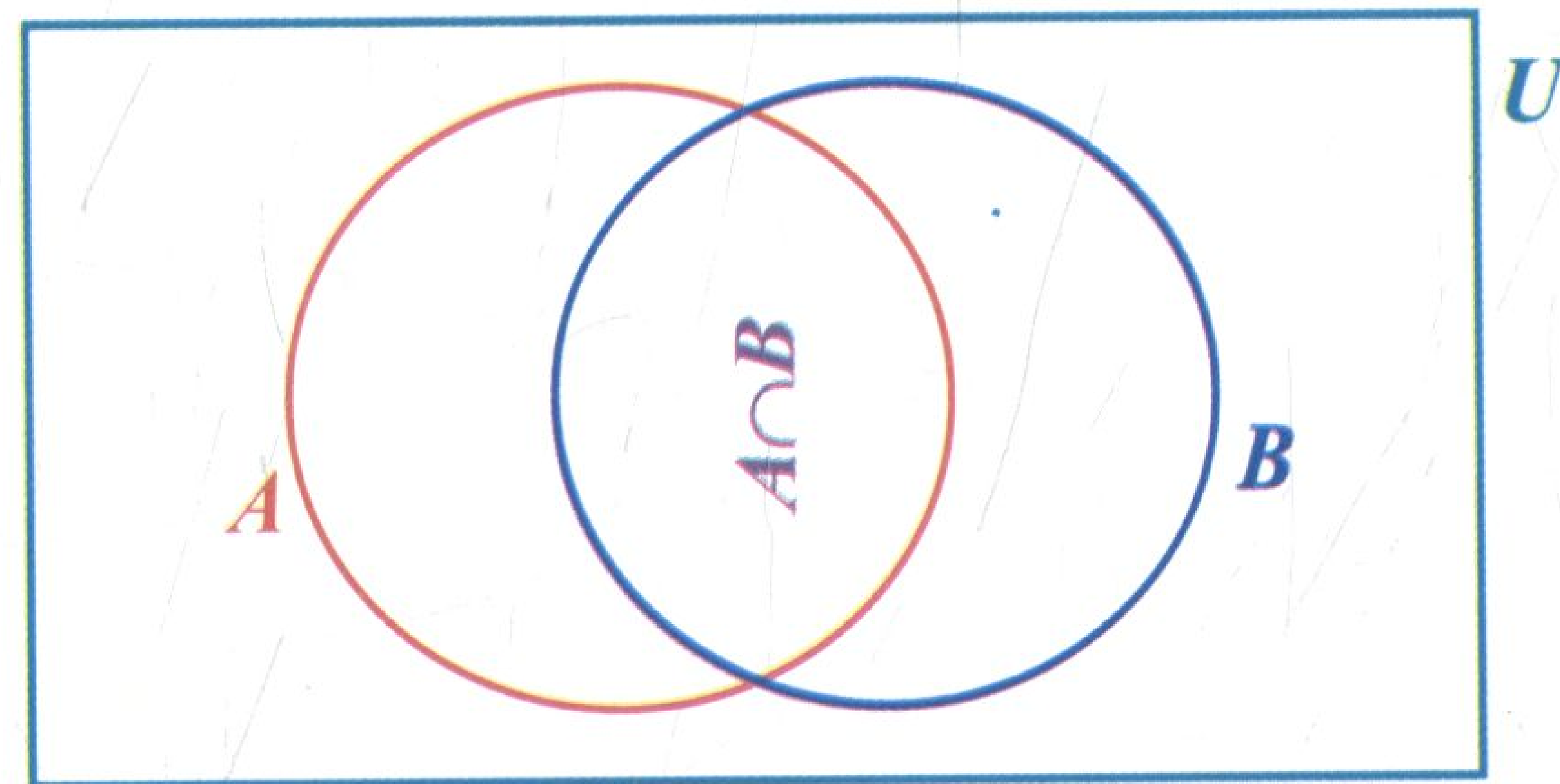
من المعلــوم أن هنـــاك عمليات تُجْرى على الأعداد منها عمليتـــي الجمـــع والضرب والطرح ، . . . وغيرها. كما أن هناك بعض العمليات التي تؤثــر على مجموعة واحدة أو أكثر. والعمليــات التي تؤثــر على مجموعـــة واحـــدة فقــط تسمى عمليات أحادية مثل عملية المكملة (عمليـــة المتممـــة – عمليـــة الإكمـــال Complement operation) والتي تقابــل دالة النفي في المنطـــق الرياضــي. أما العمليـــات التي تؤثر على مجموعتين أو أكثــر مثل عمليتي التقاطــع والاتحـــاد فهما يقابلان دالتي الوصل والفصـــل في المنطـــق الرياضـــي علـــى الترتيـــب. وسنتناول هنا هذه العمليات بالتفصيل وهو ما نطلــق عليــه جبـــر المجموعـــات Algebra of sets.

١١/١- عملية التقاطع : The Intersection Operation

يعرف التقاطع لأي مجموعتين A , B على أنه كل العناصر التي تنتمي إلـــى المجموعة A وفي نفس الوقت تنتمي إلى المجموعة B. ويُرْمَز لعملية التقاطع بين المجموعتين A , B بالرمز $A \cap B$ ، ويعرف رياضياً كالآتي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

ويمثل شكل ڤن الآتي تقاطع المجموعتين A , B:



يمكن استخدام جدول الانتماء لتوضيح تعريف التقاطع كما يلي:

A	B	$A\cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

١١/٢- المجموعتان المتنافيتان The Disjoint sets

يقال أن المجموعتين A , B متنافيتان (منفصلتان – متنافرتـــان)، إذا كـــان تقاطعهما هو المجموعة الخالية. أي ليس بينهما عناصر مـــشتركة. أي أن A , B مجموعتان متنافيتان إذا وفقط إذا كان $A\cap B=\Phi$.

مثال (١١)

١ – تقاطع المجموعتين $A=\{1,5,9,10\}$ ، $B=\{-2,3,5,6,9,15\}$ هو:

$A\cap B=\{5\ ,\ 9\}$

٢ – من تعريف المجموعات العددية نجد أن:

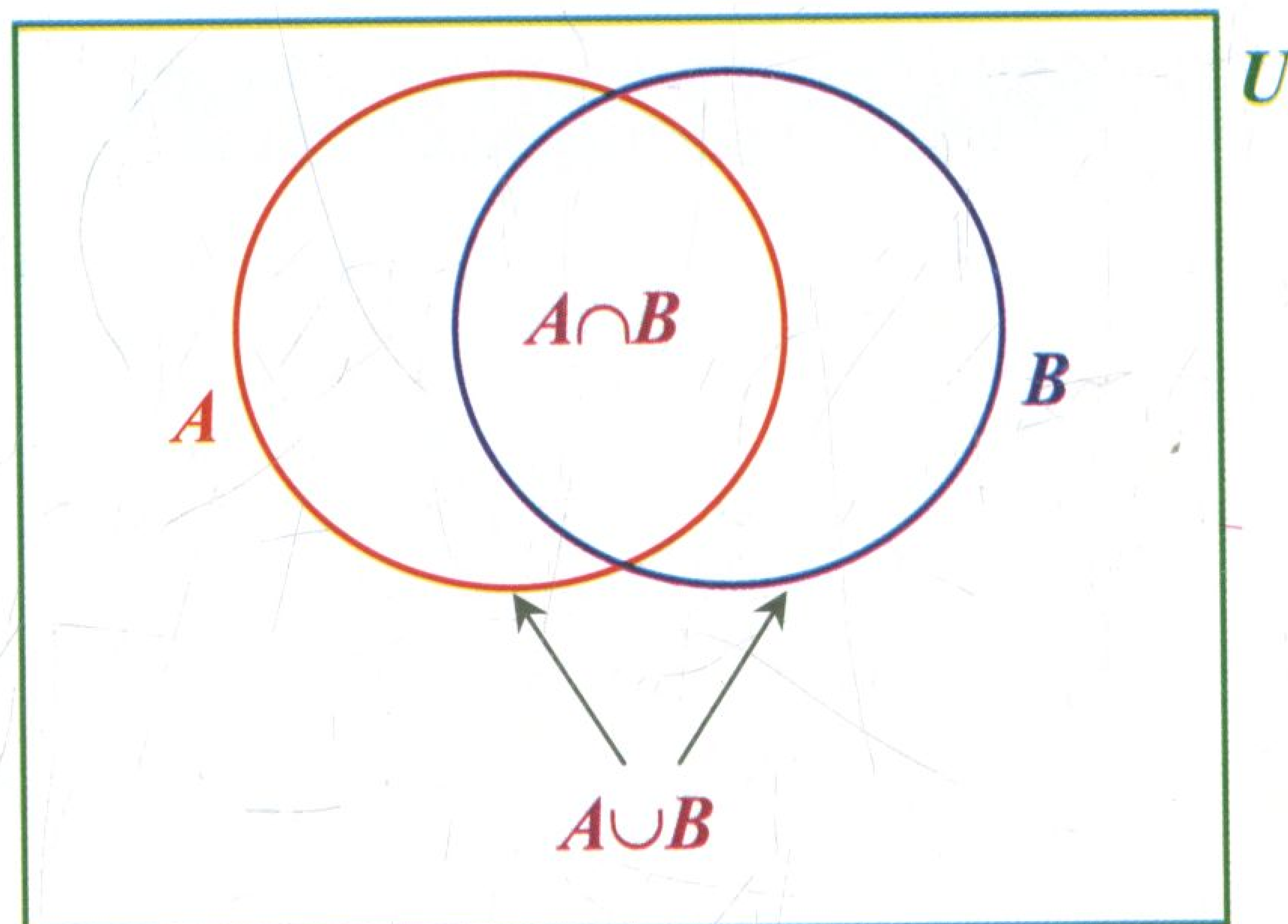
$$N\cap W=N\quad ,\quad W\cap Z=W\quad ,\quad Z\cap Q=Z\quad ,\quad Q\cap R=Q$$

١١/٣- عملية الإتحاد The Union Operation

يعرف الاتحاد بين مجموعتين A , B على أنه كل العناصر التي تنتمي إلـــى المجموعة A أو تنتمي إلى المجموعة B أو كليهما معاً. ويُرْمَز لعملية الاتحاد بين المجموعتين A , B بالرمز $A\cup B$ ، ويعرف رياضياً كالآتي:

$$A\cup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$$

ويمثل شكل فن الآتي مفهوم اتحاد المجموعتين A , B:



يمكن استخدام جدول الانتماء لتوضيح مفهوم الاتحاد كما يلي:

A	B	$A\cup B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

مثال (١٢)

١ – اتحاد المجموعتان $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{3,7,5\}$ هو:

$$A\cup B=\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,7\}$$

٢ – من تعريف المجموعات العددية نجد أن:

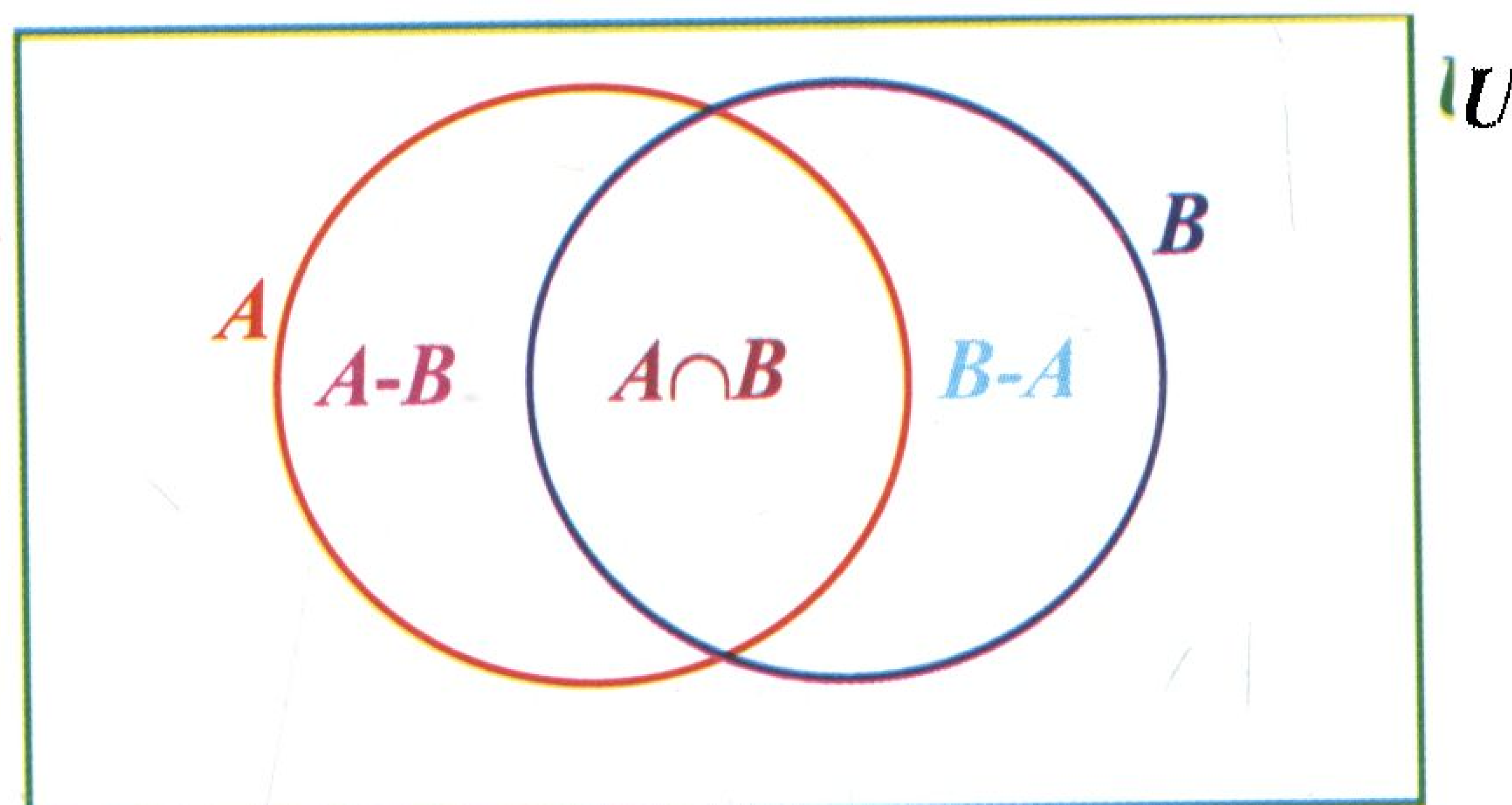
$$N\cup W=W\quad ,\quad W\cup Z=Z\quad ,\quad Z\cup Q=Q\quad ,\quad Q\cup R=R$$

١١/٤ – عملية الفرق The Difference Operation

يعرف الفرق بين المجموعتين $A\ ,\ B$ والذي يرمز له بالرمز $(A-B)$ على أنه كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B. ويُعرف رياضياً كالآتي:

$$A-B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}$$
$$B-A=\{x:x\in B\wedge x\notin A\}$$

ويمثل شكل فن الآتي مفهوم الفرق بين المجموعتين A , B:



يمكن استخدام جدول الانتماء لتوضيح مفهوم الفرق بين مجموعتين كما يلي:

A	B	$A - B$	$B - A$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

مثال (١٣): إذا كانت $A = \{1,3,4,5,6\}$ ، $B = \{3,4,7\}$ فإن:

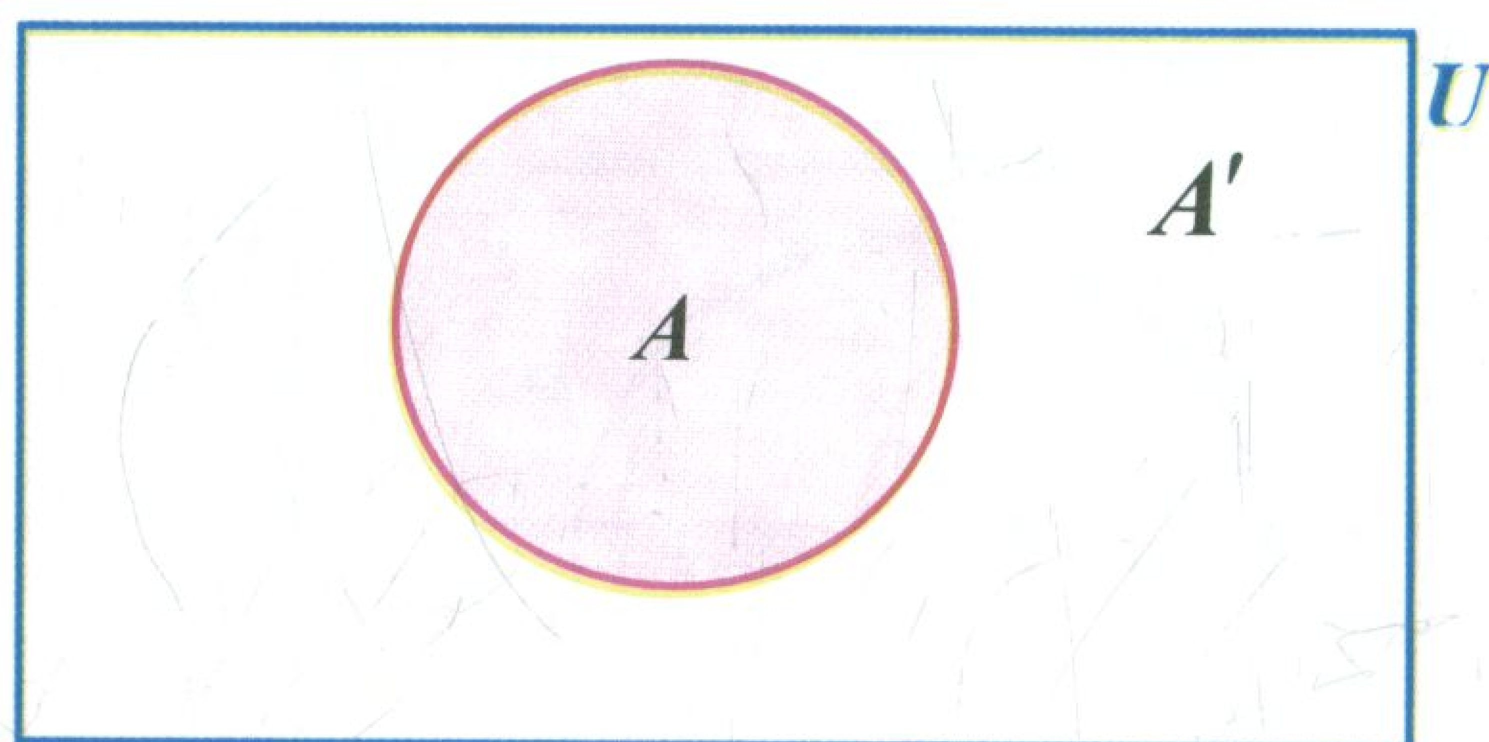
$$A - B = \{1,5,6\} \quad , \quad B - A = \{7\}$$

١١/٥- المجموعة المتممة The Complement Set

إذا كانت $A \subset U$ ، فإن متممة (مكملة) المجموعة A والتي يرمز لها بالرمز A' هي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة U ولا تنتمي إلى المجموعة A. أي أن A' هي الفرق بين U والمجموعة A. وتعرف رياضيا كالآتي:

$$A' = U - A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

ويمثل شكل فن الآتي مفهوم المجموعة المتممة:



يمكن استخدام جدول الانتماء لتوضيح مفهوم المجموعة المتممة كما يلي:

A	A'
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

٦/١١- عملية الفرق المتماثل The Symmetric Difference

يعرف الفرق المتماثل بين المجموعتين A , B على أنه:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

ويمكن أيضاً تعريف الفرق المتماثل بين المجموعتين A , B على أنه الفـــرق بين اتحادهما وتقاطعهما. أي أن:

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

الثاني عشر: خواص العمليات على المجموعات

إذا كان A , B , C ثلاثة مجموعات، فإن العمليات على المجموعات تحقق الخواص التالية:

١ – قانونا الثبات (الجمود) Idempotent Laws

$i) A \cap A = A \quad , \quad ii) A \cup A = A$

٢ – قانونا الإبدال Commutative Laws

$i) A \cap B = B \cap A \quad , \quad ii) A \cup B = B \cup A$

٣ – قانونا الدمج (التجميع – التنسيق) Associative Laws

$i) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$ii) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

٤ – قانونا التوزيع Distributive Laws

$i) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$ii) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

٥ – قانونا ديمورجان DeMorgan's Laws

$i) (A \cap B)' = A' \cup B'$

$ii) (A \cup B)' = A' \cap B'$

٦ – قوانين الوحدة والشمول Identity and Universal Laws

$i) A \cap U = A \quad , \quad ii) A \cup U = U$

$iii) A \cap \Phi = \Phi \quad , \quad iv) A \cup \Phi = A$

٧ – قوانين المتممة Complement Laws

$i) A \cap A' = \Phi$, $ii) A \cup A' = U$

$iii) (A')' = A$, $iv) U' = \Phi$

$v) \Phi' = U$, $vi) A - B = A \cap B'$

$vii) A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$, $viii) A = B \leftrightarrow A' = B'$

٨ – قانونا الامتصاص Absorption Laws

$i) A \cap (A \cup B) = A$, $ii) A \cup (A \cap B) = A$

٩ – قوانين المجموعات الجزئية Subsets Laws

$i) A \cap B \subset A$, $ii) A \cap B \subset B$

$iii) A \subset A \cup B$, $iv) B \subset A \cup B$

$v) A \cap B = A \leftrightarrow A \subset B$

$vi) A \cup B = B \leftrightarrow A \subset B$

١٠ – قوانين الفرق The Difference Laws

$i) A - B \subset A$, $ii) B - A \subset B$

$iii) (A - B) \cap B = \Phi$, $iv) A - A = \Phi$

$v) A - \Phi = A$, $vi) \Phi - A = \Phi$

$vii) A - B = A - (A \cap B)$, $viii) A - B = \Phi \leftrightarrow A \subset B$

$x) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$xi)\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$xii)\ A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$xiii)\ (A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B$

١١ – قوانين الفرق المتماثل The Symmetric Difference Laws

$i)\ A\Delta A=\Phi$

$ii)\ A\Delta\Phi=A$

$iii)\ A\Delta B=B\Delta A$

$iv)\ A\Delta B=\Phi\leftrightarrow A=B$

$v)\ A\Delta B=A\Delta C\rightarrow B=C$

$vi)\ (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

$vii)\ A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

إثبات صحة هذه الخواص متروك للقارئ.

مثال (١٤): أثبت صحة الخواص التالية:

$i)\ A\cap B=B\cap A$

$ii)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$iii)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$iv)\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$v)\ (A \cup B)' = A' \cap B'$

$vi)\ A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

الحل

(i) لإثبات صحة القانون $A \cap B = B \cap A$ يجب إثبات أن:

$a) A \cap B \subset B \cap A$

$b) B \cap A \subset A \cap B$

$a) Let\ \ x \in A \cap B \to x \in A \wedge x \in B$

$\to x \in B \wedge x \in A$ (قانون الإبدال في المنطق)

$\to x \in B \cap A$

$\to A \cap B \subset B \cap A$

$b) Let\ \ x \in B \cap A \to x \in B \wedge x \in A$

$\to x \in A \wedge x \in B$ (قانون الإبدال في المنطق)

$\to x \in A \cap B$

$\to B \cap A \subset A \cap B$

من (a)، (b) نجد أن $A \cap B = B \cap A$.

(ii) لإثبات صحة القانون $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ يجب إثبات أن:

$a) (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

$b) A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

$a) Let\ x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$\rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$

$\rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ (قانون الإبدال)

$\rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$

$\rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\rightarrow (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

$a) Let\ x \in A \cup (B \cup C) \rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$

$\rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$\rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ (قانون الإبدال)

$\rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$\rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$\rightarrow A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

من (a)، (b) نجد أن $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(iii) لإثبات صحة القانون $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ يجب إثبات أن:

$a) A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$b) (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$a) Let\ x \in A \cap (B \cup C) \rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

$\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (قانون التوزيع)

$\rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cup C)$

$\rightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cup C)$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$b) (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

ومن ثم فإن:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ملاحظة

من تعريف الانتماء نجد أن:

$1) x \notin (A \cup B) \rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$2) x \notin (A \cap B) \rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

(***iv***) لإثبات صحة القانون $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ يجب إثبات أن:

$a) A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$

$b) (A - B) \cup (A - C) \subset A - (B \cap C)$

$a) Let\ \ x \in A-(B \cap C) \rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$

$\rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$

$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$ (قانون التوزيع)

$\rightarrow x \in (A-B) \vee x \in (A-C)$

$\rightarrow x \in (A-B) \cup (A-C)$

$\rightarrow A-(B \cap C) \subset (A-B) \cup (A-C)$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$b)\ (A-B) \cup (A-C) \subset A-(B \cap C)$

ومن ثم فإن:

$A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

(v) لإثبات صحة القانون $(A \cup B)' \equiv A' \cap B'$ يجب إثبات أن:

$a)\ (A \cup B)' \subset A' \cap B'$

$b)\ A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

$a) Let\ \ x \in (A \cup B)' \rightarrow x \notin (A \cup B)$

$\rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$

$\rightarrow x \in (A' \cap B')$

$\rightarrow (A \cup B)' \subset (A' \cap B')$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$b)\ (A' \cap B') \subset (A \cup B)'$$

ومن ثم فإن:

$$(A \cup B)' \equiv A' \cap B'$$

(vi) لإثبات صحة القانون $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ نستخدم تعريف الفرق المتماثل وأيضاً الخواص الأساسية للمجموعات، كما يلي:

$$L.H.S. = A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)]$$

$$= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] \quad \text{(قانون التوزيع)}$$

$$= [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]$$

$$= (A \cap B) \Delta (A \cap C) = R.H.S.$$

تمارين

١ – إذا كانت:

$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$

$A = \{6, 8, 12, 16\} \quad , \quad B = \{6, 12, 20\}$

أوجد كل مما يأتي:

$A' \ , \ (A')' \ , \ B' \ , \ A - B \ , \ A \cap B \ , \ A \cup B \ ,$

$(A \cup B)' \ , \ (A \cap B)' \ , \ A' \cup B' \ , \ A' \cap B'$

٢ – ما هي شروط صحة التساوي في ما يلي:

$i)\ (A \cup B) \cup C = A \cup B$

$ii)\ (A \cup B) = (B \cap A)$

٣ – مستخدماً طريقة الخاصية المميزة أثبت صحة خواص العمليات على المجموعات.

٤ – بسط المجموعات المركبة التالية:

$i)\ (A \cup B) \cup (B \cup C)$

$ii)\ (A \cup B) \cup (B \cup A)$

$iii)\ (A \cup A) \cap (B \cup B)$

٥ – أثبت أن قانون الاختصار التالي غير صحيح وذلك بإعطاء مثال عكسي:

$A \cup B = A \cup C \ \rightarrow \ B = C$

٦ – إذا كانت A , B , C ثلاث مجموعات، أثبت أن:

$1)\ A \subset B \ \leftrightarrow \ A \cap B' = \Phi$

$2)\ A = B \ \leftrightarrow \ A \Delta B = \Phi$

$3)\ (A\cap B\cap C)' = A'\cup B'\cup C'$

$4)\ (A\cup B) = (A'\cap B')'$

$5)\ (A\cap B) = (A'\cup B')'$

$6)\ (A\cap B) = B-(B-A)$

$7)\ (A\cap B)\cap B' = A \leftrightarrow A\cap B = \Phi$

$8)\ (A\cap B')'\cup(B\cap C) = A'\cup B$

$9)\ A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$10)\ (A\cup B\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')'\cap C' = B\cap C'$

$11)\ (A\cup B)\cap A' = B\cap A'$

$12)\ (A\cap B)\cup B = B$

$13)\ (A\cup B)\cap B = B$

$14)\ (A\cup U)\cap(A\cap\Phi) = \Phi$

$15)\ A-B = A\cap B'$

٧ – نفرض أن المجموعة:

$$A_n = \left(0\ ,\ \frac{1}{n}\right) \quad , \quad n\in N$$

أوجد ما يلي:

$i)\ A_3\cap A_{20} \qquad , \qquad ii)\ A_3\cap A_7$

٨ – إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ ، أوجد مجموعة القوة $P(A)$ للمجموعة A.

٩ – إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها n. أثبت أن مجموعة القوة $P(A)$ للمجموعة A تحتوي على 2^n عنصراً.

١٠ – لأي مجموعتين A , B أثبت أن:

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad , \qquad A\cap B\neq\Phi$$

الفصل الرابع

معادلات الدرجة الأولى والثانية وتطبيقاتها

FIRST AND SECOND-DEGREE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

مقدمة Introduction

المعادلـــة هي متســاوية على الصورة $P(x)=0$ حيث P هي كثيرة حــدود، x هو المتغير.

وفي هذه الحالـــة فإن المعادلة تحتــوي على متغير واحد فقــط. وسندرس أيضاً في هذا الفصل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية التي تحتــوي علـــى متغيـرين وتطبيقات عليها.

الهــدف الأساسي هنا هــو إيجاد مجموعة كل الحلول وأيضاً التطبيقات العملية على كل من المعادلات الخطيـــة (من الدرجـــة الأولى) وغير الخطية (من الدرجـــة الثانية فقط).

أولاً: المعادلات الخطية Linear Equations

المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى، أي تمثل معادلة خط مستقيم، وتنقسم هنا إلى نوعين أساسيين هما:

١/١- المعادلة الخطية في مجهول واحد

هذا النوع من المعادلات يأخذ الصورة :

$$ax + b = 0 \;\; , \;\; a, b \in R \;\; , \;\; a \neq 0$$

حيث R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية كما أن x هو المجهول. ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x = \frac{-b}{a} \;\; , \;\; a \neq 0$$

مثال (١): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2x + 14 = 0$$

الحل

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة على النحو التالي:

$$2x + 14 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2x = -14$$

$$\Rightarrow \;\; x = \frac{-14}{2} = -7$$

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$8x - 3 = 2x + 27$$

الحل

الحل العام للمعادلة يمكن إيجاده كالآتي:

$$8x - 3 = 2x + 27$$

$$\Rightarrow \;\; 8x - 2x = 27 + 3 \;\; \Rightarrow \;\; 6x = 30$$

$$\Rightarrow \;\; x = \frac{30}{6} = 5$$

مثال (٣): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$$

الحل

نلاحظ أن العامل المشترك الأعلى للمقام هو 6، بالضرب فيه، نجد أن:

$$3+2x=x+4$$

$$\Rightarrow\ 2x-x=4-3$$

$$\Rightarrow\ x=1$$

مثال (٤): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2x+3(x-2)=6-2(x-1)$$

الحل

الحل العام للمعادلة يمكن إيجاده كالآتي:

$$2x+3x-6=6-2x+2$$

$$\Rightarrow\ 2x+3x+2x=6+2+6$$

$$\Rightarrow\ 7x=14 \quad \Rightarrow\ x=2$$

تطبيق (١): أوجد طول ضلع المربع الذي محيطه $20\ cm$.

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع يساوي x. وبالتالي فإن محيط المربع يساوي $4\ x$.
ومن ثم فإن:

$$4x=20$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{20}{4}=5\,cm$$

تطبيق (٢): قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يساوي ثلاثة أمثال عرضها. فإذا كان محيطها يساوي *360* متراً. أوجد طول وعرض الأرض.

الحل

نفرض أن عرض المستطيل هو x، وبالتالي فإن طولها هو $3\ x$. ومن ثم فـــإن محيطه = (الطول + العرض) $\times 2 = 2\times(3x+x) = 2\times 4x = 8x$. أي أن:

$$8x = 360\,m$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{360}{8} = 45\,m$$

وبالتالي فإن عرض القطعة المستقيمة يساوي *45* متراً، وطولها *135* متراً.

تطبيق (٣): ثلاثة أرقام متتالية مجموعها يساوي *78*. أوجد هذه الأرقام الثلاثة.

الحل

نفرض أن الأرقام الثلاثة هي $(x+2)$, $(x+1)$, x، وبالتالي فإن:

$$x+(x+1)+(x+2)=78$$

$$\Rightarrow 3x+3=78 \quad \Rightarrow \quad 3x=78-3$$

$$\Rightarrow 3x=75 \quad \Rightarrow \quad x=25$$

١/٢- المعادلة الخطية في مجهولين

لدراسة تفاصيل المعادلة الخطية في مجهولين، دعنا نستعرض المثال التالي:

ذهب الطفل أحمد الذي يمتلك *30* ريالاً سعودياً إلى مدينة الألعاب للأطفال، فوجد أن هناك نوعين من الألعاب المفضلة إليه، فإذا كان النوع الأول يتكلف *5* ريالات عن اللعب لمرة واحدة، والنوع الثاني يتكلف *10* ريالات عن اللعب للمرة الواحدة.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

ما هي الإمكانات المتاحة للعب بكلا النوعين بحيث ينفق كل ما معه من نقود ؟

الإجابة هي كالآتي:

نفرض أن عدد مرات اللعب من النوع الأول هو x، ومن النوع الثاني هـو y.
وبالتالي فإن:

- تكلفة مرات اللعب من النوع الأول هي $5x$ ريالاً.
- وتكلفة مرات اللعب من النوع الثاني هي $10y$ ريالاً.

وحتى ينفق أحمد كل ما معه من ريالات يجب أن يكون:

$$5x + 10y = 30$$

بقسمة طرفي العلاقة على 5 نحصل على:

$$x + 2y = 6$$

وهي علاقة رياضية بين متغيرين هما $x\ ,\ y$ ، وتسمى معادلة خطية فـي مجهـولين لأنها من الدرجة الأولى.

إذا قرر أحمد عدم اللعب بالنوع الأول فإن $x = 0$ ، وبالتالي فإن:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

أي أنه يمكن إنفاق المبلغ بالكامل على اللعب ثلاث مرات من النوع الثاني، ويمثلهـا الزوج المرتب:

$$(x\ ,\ y) = (0\ ,\ 3)$$

مما سبق نجد أن المعادلة الخطية في مجهولين تأخذ الصورة:

$$ax + by = c \quad , \quad a\ , b\ , c \in R\ \ ,\ a \neq 0 \ \ or\ \ b \neq 0$$

ويوجد عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة التي تحقق هذه المعادلة، والتي عند تمثيلهـا بيانياً تكون خط مستقيم. ولهذا السبب سميت بالعلاقة الخطية.

تطبيق (٤): أوجد الإمكانات المختلفة ليدفع شخص مبلغ 50 ريالاً باستخدام نوعين من الأوراق المالية فئة 5 ريالات وفئة 10 ريالات.

الحل متروك للقارئ.

مثال (٥): أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من المعادلات الآتية:

$$i)\ 3x + y = 5 \qquad , \qquad ii)\ 3x - 2y = 6$$

$$iii)\ 2x = 3 \qquad , \qquad iv)\ y = -2$$

الحل

يمكن إيجاد الأزواج المرتبة وذلك بوضع قيمة x وإيجاد قيمة y المناظرة أو العكس.

(i) الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة هي:

$$(0\ ,5)\ ,\ (1\ ,2)\ ,\ (2\ ,-1)$$

(ii) الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة هي:

$$(0\ ,-3)\ ,\ \left(1\ ,-1\frac{1}{2}\right)\ ,\ (2\ ,0)$$

(iii) حيث إن:

$$2x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1\frac{1}{2}$$

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة $(x\ ,y)$ بحيث أن $x = 1\frac{1}{2}$ مهما كانت قيمة y. مثل:

$$\left(1\frac{1}{2}\ ,0\right)\ ,\ \left(1\frac{1}{2}\ ,1\right)\ ,\ \left(1\frac{1}{2}\ ,2\right)$$

(iv) حيث إن:

$$y = -2$$

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة $(x\ ,y)$ بحيث أن $y = -2$ مهما كانت قيمة x. مثل:

$$(0\ ,-2)\ ,\ (1\ ,-2)\ ,\ (2\ ,-2)$$

مثال (٦): بين أي من الأزواج المرتبة:

$$(0\ ,1)\ ,\ (5\ ,3)\ ,\ (3\ ,5)\ ,\ (-2\ ,-5)$$

يحقق العلاقة:

$$2x - y = 1$$

الحل متروك للقارئ.

مثال (٧): إذا كان الزوج المرتب $(1, 2-)$ يحقق العلاقة:

$$3x + by = 1$$

أوجد قيمة الثابت b.

الحل

حيث إن الزوج المرتب يحقق العلاقة،فإن:

$$(3)(-2)+(b)(1)=1 \Rightarrow -6+b=1$$

$$\Rightarrow b=7$$

مثال (٨): إذا كان الزوج المرتب $(k, 2k)$ يحقق العلاقة:

$$5x-y=6$$

أوجد قيمة الثابت k.

الحل متروك للقارئ.

٣/١- التمثيل البياني للمعادلة الخطية

ذكرنا في ما سبق أن المعادلة الخطية:

$$ax+by=c \quad , \quad a, b, c \in R \ , \ a \neq 0 \ \text{or} \ b \neq 0$$

يمثلها بيانياً خط مستقيم. ولرسم هذا الخط نكتفي عند تمثيلها بيانياً بإيجاد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق المعادلة. ويجب التأكد من وقوع الأزواج المرتبة على استقامة واحدة. ومن ثم فإن هذا الخط هو التمثيل البياني للمعادلة.

مثال (٩): مثل بيانياً المعادلة الخطية:

$$2x-y=3$$

الحل

لتمثيل هذه المعادلة بيانياً، نوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق هذه المعادلة كما في الجدول التالي:

x	0	1	2
y	-3	-1	1

نرسم محورين هما Y، X يتقاطعان عند نقطة الأصل O. إحدى هذه المحاور أفقياً ويطلق عليه محور السينات أو محور X. والمحور الثاني يكون رأسياً ويطلق عليه محور الصادات أو محور Y. وأي زوج مرتب يمكن تمثيله بنقطة في مستوى

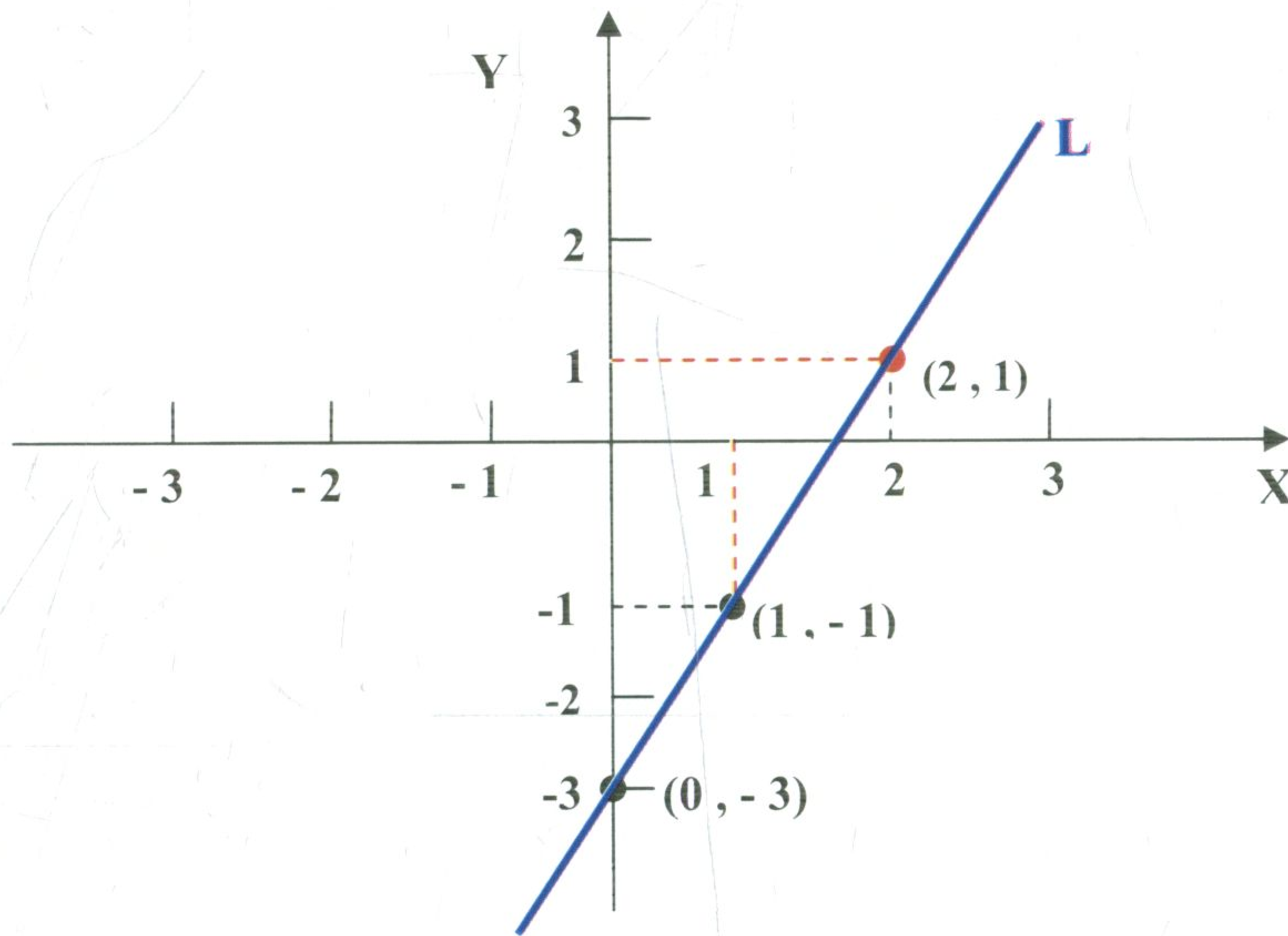
الإحداثيات. القيمة الأولى في الزوج المرتب تسمى الإحداثي الأول أو الإحداثي السيني. أما القيمة الثانية تسمى الإحداثي الثاني أو الإحداثي الصادي. ويسمى هذا النظام بالنظام الإحداثي أو مستوى الإحداثيات أو المستوى الثنائي. وبالتالي فإنه يمكن رسم الخط المستقيم المار بالأزواج المرتبة الثلاثة:

$$(0\ ,-3)\ ,\ (1\ ,-1)\ ,\ (2\ ,1)$$

والشكل (١ – ١) التالي يوضح التمثيل البياني للمعادلة الخطية:

$$2x - y = 3$$

والذي يمثلها الخط المستقيم L.



شكل (٤ – ١)

تطبيق (٥): مثل بيانياً المعادلة الخطية:

$$2x + 5y = 10$$

وإذا كان الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة يقطع محور السينات في A، ويقطع محور الصادات في B. أوجد مساحة المثلث OAB. حيث O هي نقطة الأصل.

الحل متروك للقارئ.

١/٤ - حالات خاصة Special Cases

يمكن دراسة بعض الحالات الخاصة على المعادلة الخطية:

$$ax + by = c \quad , \quad a , b , c \in R \ , \ a \neq 0 \ \ or \ \ b \neq 0$$

كما يلي:

أ - إذا كان $a = 0 \ , \ b \neq 0$ فإن العلاقة تأخذ الصورة:

$$by = c \quad , \quad b , c \in R \ , \ b \neq 0$$

ويمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة $(0 , c/b)$.

ب- إذا كان $a \neq 0 \ , \ b = 0$ فإن العلاقة تأخذ الصورة:

$$a x = c \quad , \quad a , c \in R \ , \ a \neq 0$$

ويمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور الصادات ويقطع محور السينات في النقطة $(c/a , 0)$.

ج- إذا كان $a \neq 0 \ , \ b \neq 0 \ , c = 0$ فإن العلاقة تأخذ الصورة:

$$a x + b y = 0 \quad , \quad a , b \in R \ , \ a \neq 0 \ , \ b \neq 0$$

ويمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0 , 0)$.

ثانياً: القيمة المطلقة (المقياس) Absolute Value

إذا كان x عدداً حقيقياً، فإن القيمة المطلقة لهذا العدد والتي يرمز لها بالرمز $|x|$ تعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

أي أن:

$$|x| \geq 0 \quad , \quad \forall\ x \in R$$

وهي تمثل المسافة بين النقطة 0 والنقطة x على خط الأعداد الحقيقية. وبالتالي فهي دائماً موجبة أو تساوي الصفر لأنها تمثل مسافة. مثال ذلك:

$$|2| = 2 \quad , \quad |-5| = 5 \quad , \quad |0| = 0$$

خواص القيمة المطلقة

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x تحقق الخواص التالية:

$1-\ |x.y| = |x|.|y|$

$2-\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad , \quad y \in R - \{0\}$

$3-\ |x| = a \iff x = \pm a \quad , \quad a \geq 0$

$4-\ |x + y| \leq |x| + |y|$

$5-\ |x+y| \geq ||x| - |y||$

$6-\ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \quad , \quad a \geq 0$

$7-\ |x| \geq a \iff x \geq a \ \text{ or } \ x \leq -a \quad , \quad a \geq 0$

$8-\ \sqrt{a^2} = |a|$

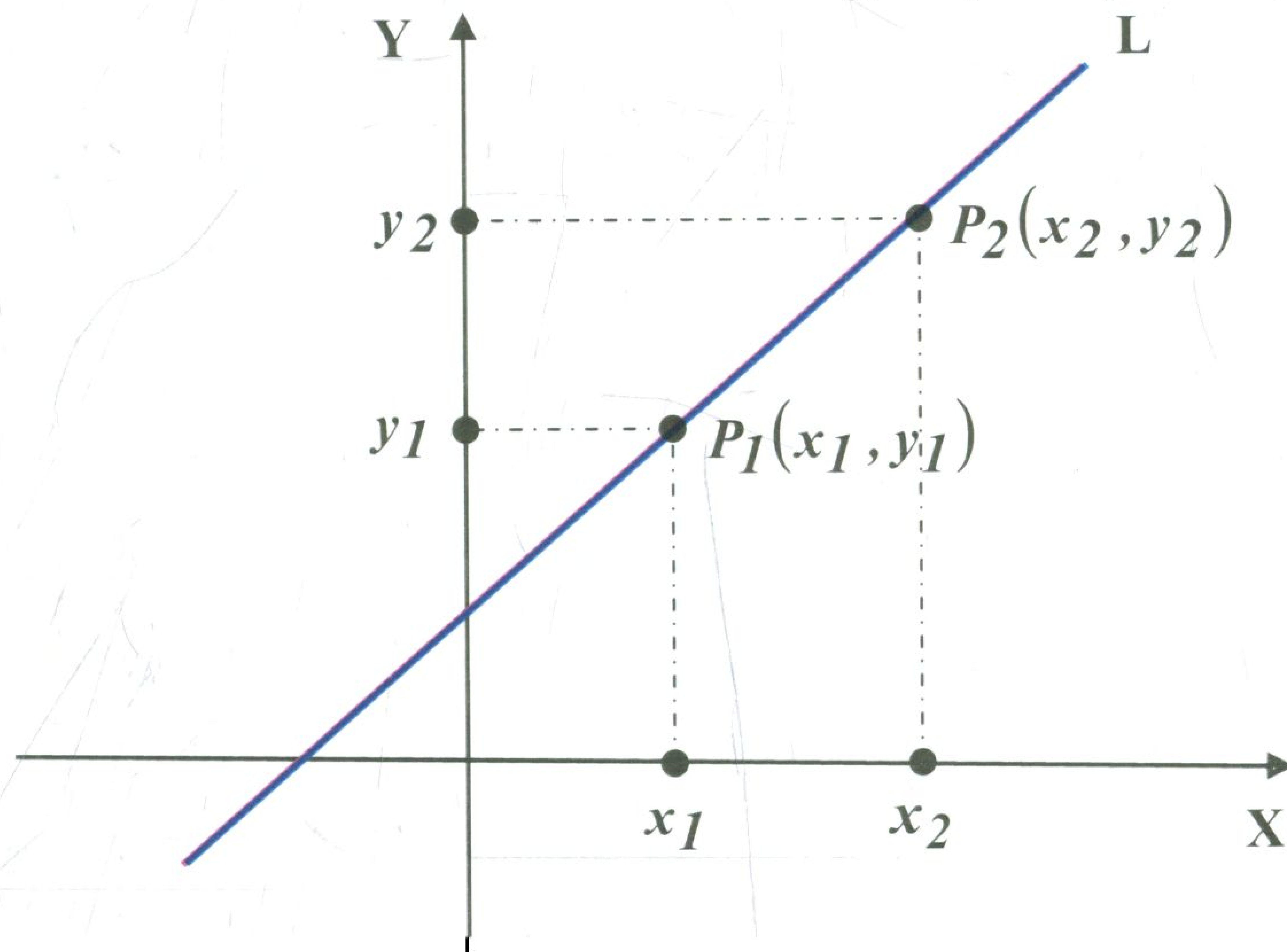
$9-\ |a| = |-a|$

ثالثاً: المسافة (البعد) بين نقطتين

إذا تحركت نقطة على خط مستقيم L من الموضع $P_1(x_1, y_1)$ إلى الموضع $P_2(x_2, y_2)$ فإن:

- ♦ التغير في الإحداثي السيني يساوي $x_2 - x_1$.
- ♦ التغير في الإحداثي الصادي يساوي $y_2 - y_1$.

كما يمثلها شكل (١ – ٢) الآتي:



شكل (٤ – ٢)

وبالتالي فإن المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ تعرف كالآتي:

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال (١٠): أوجد المسافة بين النقطتين $(4, 6)$, $(1, 2)$.

الحل

من تعريف المسافة بين نقطتين نجد أن:

$$\sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

رابعاً: ميل الخط المستقيم

يعرف ميل الخط المستقيم على أنه النسبة بين التغير في الإحداثي الصادي والتغير في الإحداثي السيني. ويرمز له بالرمز m. أي أن:

$$m = \text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

أي أن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_1 \neq x_2$$

- إذا كان $x_1 = x_2$ فإن ميل الخط المستقيم يكون غير معرف. أي أن ميل الخط المستقيم الرأسي يكون غير معرف.
- ميل الخط المستقيم الأفقي يساوي الصفر.
- ميل الخط المستقيم ثابت مهما تغيرت النقاط على الخط المستقيم.
- ميل الخط المستقيم يعبر عن معدل التغير في y بالنسبة إلى x.

مثال (١١): أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-4,1)$, $(-2,-3)$.

الحل

من تعريف الميل نجد أن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{-4-(-2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

مثال (١٢): إذا كانت النقاط $P_1(3,2)$, $P_2(5,-1)$, $P_3(1,k)$ تقع على خط مستقيم واحد، أوجد قيمة الثابت k.

الحل

حيث إن النقاط الثلاثة $P_1(3,2)$, $P_2(5,-1)$, $P_3(1,k)$ تقع على استقامة واحدة، وبالتالي فإنه من خواص ميل الخط المستقيم نجد أن:

$$m(P_1 P_2) = m(P_2 P_3)$$

أي أن:

$$\frac{-1-2}{5-3}=\frac{k+1}{1-5} \Rightarrow \frac{-3}{2}=-\frac{k+1}{4} \Rightarrow k+1=6$$

وبالتالي فإن $k=5$.

مثال (١٣): أثبت أن النقاط $P_1(2,3)$, $P_2(4,2)$, $P_3(8,0)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل متروك للقارئ.

تطبيق (٦): تسير سيارة بسرعة منتظمة v، بحيث تقطع 80 كيلو متراً كل ساعتين، فإذا سارت السيارة مسافة قدرها 200 كيلو متراً في مدة خمس ساعات. أوجد السرعة المنتظمة لهذه السيارة.

الحل

نعلم أن السرعة المنتظمة v = معدل التغير في المسافة s بالنسبة للـــزمن t. أي أن:

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{200-80}{5-2}=\frac{120}{3}=40\ km/h$$

تطبيق (٧): تحرك شخص بسيارته من مدينة الطائف حتى وصل إلى مدينة جدة والتي تبعد عنها مسافة 200 كيلو متر بعد ساعتين، ثم استراح لمدة ساعة كاملة وقرر العودة مرة أخرى إلى مدينة الطائف فوصلها بعد ست ساعات من نقطة الانطلاق. أوجد:

أ – سرعة السيارة خلال رحلة الذهاب وأيضاً خلال رحلة العودة.

ب– أوجد السرعة المتوسطة للسيارة أثناء الرحلة كلها.

الحل

أ – نلاحظ أن الأزواج المرتبة في مستوى الإحداثيات تمثـل العلاقـة بـين الـزمن والمسافة. نفـرض أن النقطة $O(0\,h,0\,km)$ تمثل مدينة الطائف (نقطة البداية)، كما أن النقطة $P_1(2\,h,200\,km)$ تمثل مدينة جدة، وبالتالي فإن سرعة الـسيارة خـلال رحلة الذهاب هي:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{200 - 0}{2 - 0} = \frac{200}{2} = 100\, km / h$$

كما نفرض أن النقطة $P_2(3\,h, 200\,km)$ تمثل مدينة جدة بعد الاستراحة (نقطة بداية العودة)، كما أن النقطة $P_3(6\,h, 0\,km)$ تمثل مدينة الطائف مرة أخرى. وبالتالي فإن سرعة السيارة خلال رحلة العودة هي:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 200}{6 - 3} = \frac{-200}{3} = -66.6\, km / h$$

الإشارة السالبة تعني أن السيارة تتحرك في عكس اتجاه الحركة الأولى.

ب – السرعة المتوسطة للسيارة أثناء الرحلة كلها =

$$\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي الذي قطعت فيه المسافة}}$$

أي أن:

$$v = \frac{400}{6} = 66.6\, km / h$$

تطبيق (٨): خزان سعته 750 لتراً من الماء، مثبت في أسفله صنبور مفتوح، يتناقص الماء بمعدل 250 لتراً كل عشر دقائق. أوجد معدل تفريغ الخزان.

الحل

نلاحظ أن معدل تفريغ الخزان ما هو إلاَّ الميل من النقطة $P_1(10\,min, 500\,l)$ إلى النقطة $P_2(20\,min, 250\,l)$. أي أن:

$$Average = \frac{c_2 - c_1}{t_2 - t_1} = \frac{250 - 500}{20 - 10} = \frac{-250}{10} = -25\, l / min$$

أي أن الخزان يفرغ بمعدل 25 لتر كل دقيقة.

تطبيق (٩): ملأ شخص خزان سيارته بالوقود، فإذا كانت سعة الخزان 50 لتراً، وبعد أن قطع مسافة 200 كيلو متر، وجد أن مؤشر عداد الوقود بالسيارة به $3/5$ من سعته.

أ – ارسم الشكل البياني للعلاقة بين المسافة المقطوعة وكمية الوقود بالخزان.

ب– احسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ خزان الوقود.

الحل متروك للقارئ.

خامساً: معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه

نفرض أن $P_1(x_1, y_1)$ نقطة واقعة على الخط المستقيم L، كما أن m هو ميل هذا الخط، وبالتالي فإن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $P_1(x_1, y_1)$ وميلــه m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال (١٤): أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $P_1(3, -1)$ وميله يساوي 1.

الحل

من تعريف معادلة الخط المستقيم المار بنقطة وبمعلومية ميله نجد أن:

$$y - (-1) = (1)(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = x - 3 \quad \Rightarrow \quad y - x = -4$$

مثال (١٥): أوجد معادلة الخط المستقيم الأفقي المار بالنقطة $P_1(1, -7)$.

الحل متروك للقارئ.

سادساً: معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله والجزء المقطوع من محور الصادات

معادلة الخط المستقيم L الذي له الميل m ويقطع جزء من محور الصادات مقداره b يعرف كالآتي:

$$y = m\,x + b$$

مثال (١٦): أوجد ميل الخط المستقيم:

$$2y + 3x = 10$$

الحل

لإيجاد ميل الخط المستقيم نتبع الآتي:

$$2y + 3x = 10 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 5$$

وبالتالي فإن الميل هو $-\frac{3}{2}$ والجزء المقطوع من محور الصادات هو 5.

مثال (١٧): أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(1,-7)\,,\,P_2(2\;,\;3)$.

الحل متروك للقارئ.

ملاحظة

- يتوازى الخطان المستقيمان $L_1\,,L_2$ اللذين لهما الميلين $m_1\,,m_2$ على الترتيب، إذا كان لهما نفس الميل. أي إذا كان $m_1 = m_2$.
- يتعامد الخطان المستقيمان $L_1\,,L_2$ اللذين لهما الميلين $m_1\,,m_2$ على الترتيب، إذا كان $m_1.m_2 = -1$. أي إذا كان $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

مثال (١٨): أوجد قيمة الثابت k التي تجعل المستقيمان

$$k\,x + 3y = 15\;\;,\;\;3x - y = 4$$

أولاً: متوازيان   ثانياً: متعامدان.

الحل

لإيجاد الحل نوجد قيمة ميل المستقيم الأول وأيضاً ميل المستقيم الثاني كالآتي:

- بالنسبة للمستقيم الأول $k\,x+3\,y=15$:

$$k\,x+3\,y=15 \;\;\Rightarrow\;\; y=-\frac{k}{3}x+5$$

وبالتالي فإن ميل هذا الخط المستقيم هو $-\frac{k}{3}$.

- بالنسبة للمستقيم الثاني $3\,x-y=4$:

$$3\,x-y=4 \;\;\Rightarrow\;\; y=3\,x-4$$

وبالتالي فإن ميل هذا الخط المستقيم هو 3 .

أولاً: لكي يتوازى الخطان المستقيمان يجب أن يكون:

$$m_1=m_2 \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{k}{3}=3 \;\;\Rightarrow\;\; k=-9$$

ثانياً: لكي يتعامد الخطان المستقيمان يجب أن يكون:

$$m_1=-\frac{1}{m_2} \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{k}{3}=-\frac{1}{3} \;\;\Rightarrow\;\; k=1$$

مثال (١٩): أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(3\;,\;2)$ ويوازي الخط المستقيم الذي معادلته $2\,x+3\,y=2$.

الحل متروك للقارئ.

سابعاً: المعادلات من الدرجة الثانية Second – Degree Equations

المعادلة من الدرجة الثانية (غير الخطية) محل الدراسة تنقسم إلى نوعين هما:

٧/١– معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد (مجهول واحد) هي:

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad , \quad a , b , c \in R \ , \ a \neq 0$$

نلاحظ هنا أن المعادلة السابقة في متغير واحد (مجهول واحد) هو x، وأن أكبر أس هو 2 لهذا المتغير. وبالتالي فإن المعادلة تسمى معادلة من الدرجة الثانية، وأحياناً يطلق عليها معادلة تربيعية Quadratic Equation في متغير واحد. والحل العام لهذه المعادلة (مجموعة الحل) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R. وكل حل يسمى جذراً للمعادلة Roots.

لإيجاد الحل العام لمعادلات الدرجة الثانية، توجد طرق عديدة للحل سنذكر منها بعض الطرق كالآتي:

٧/١/١– طريقة تحليل المعادلة: $x^2 + b x + c = 0$

تعتمد هذه الطريقة على تحليل المعادلة وذلك بحاصل ضرب مقدارين (حدين) من الدرجة الأولى وإيجاد الحل كما سبق باستخدام الخاصية الآتية:

إذا كان a , b عددين حقيقيين وكان $a . b = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

ملاحظة

لإيجاد الحل العام لمعادلة الدرجة الثانية:

$$x^2 + b x + c = 0 \quad , \quad b , c \in R$$

يجب ترتيب حدود المعادلة تنازلياً أو تصاعدياً حسب أس المتغير x، ويفضل الترتيب التنازلي، ثم نجعل المعادلة صفرية. كما يجب إخراج العامل المشترك الأدنى بين حدود المعادلة. وبعد ذلك يتم تحليل المقدار $x^2 + b x + c$ إلى عاملين على الصورة $(x + m)(x + n)$ وذلك لإيجاد قيمة x. فإذا كان:

أ – المقدار c موجباً، فإن حاصل ضرب العددين m , n يجب أن يكون موجباً، ومساوياً قيمة c، ولهما نفس إشارة العدد b، ومجموعهما مساوياً العدد b.

ب – العدد c سالباً، فإن حاصل ضرب العددين m , n يجب أن يكون سالباً، ومساوياً قيمة العدد c، ويكونان مختلفـــان في الإشارة، وأكبرهما عددياً له نفس إشارة العدد b، والفرق بينهما مساوياً العدد b.

مثال (٢٠): أوجد ما يلي:

١ – عددين حاصل ضربهما يساوي 30 ومجموعهما يساوي 11.

٢ – عددين حاصل ضربهما يساوي 12 ومجموعهما يساوي $8-$.

٣ – عددين حاصل ضربهما يساوي $18-$ ومجموعهما يساوي 3.

٤ – عددين حاصل ضربهما يساوي $15-$ ومجموعهما يساوي $14-$.

الحل

١ – العددان هما $5 , 6$.

٢ – العددان هما $-2 , -6$.

٣ – العددان هما $-3 , 6$.

٤ – العددان هما $1 , -15$.

مثال (٢١): أوجد الحل العام للمعادلات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$i)\ x(x-3)=0 \qquad , \qquad ii)\ (x+2)(3x-5)=0$$

$$iii)\ x^2-5x-6=0 \qquad , \qquad iv)\ x^2+8x+15=0$$

الحل

(i) باستخدام خاصية حاصل ضرب حدين نجد أن:

$$x(x-3)=0 \ \Rightarrow\ x=0 \quad or \quad x-3=0$$

$$\Rightarrow\ x=0 \quad or \quad x=3$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{0,3\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمـــة x في المعادلة الأصلية.

(ii) باستخدام خاصية حاصل ضرب حدين نجد أن:

$$(x+2)(3x-5)=0 \;\Rightarrow\; x+2=0 \;\; or \;\; 3x-5=0$$

$$\Rightarrow \; x=-2 \;\; or \;\; 3x=5$$

$$\Rightarrow \; x=-2 \;\; or \;\; x=5/3$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-2, 5/3\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

(iii) نبحث عن عددين بحيث أن:

حاصل ضربهما = 6 -   ومجموعهما = 5 -.

نجد أن العددين هما 6 - , 1. وبالتالي فإن:

$$x^2-5x-6=0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-6)=0$$

$$\Rightarrow \; x+1=0 \;\; or \;\; x-6=0$$

$$\Rightarrow \; x=-1 \;\; or \;\; x=6$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-1, 6\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

(iv) نبحث عن عددين بحيث أن:

حاصل ضربهما = 15   ومجموعهما = 8.

نجد أن العددين هما 5 , 3. وبالتالي فإن:

$$x^2+8x+15=0 \;\Rightarrow\; (x+3)(x+5)=0$$

$$\Rightarrow \; x+3=0 \;\; or \;\; x+5=0$$

$$\Rightarrow \; x=-3 \;\; or \;\; x=-5$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-3, -5\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

تطبيق (١٠): قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار 5 م. فإذا كانت المساحة تساوي 14 م٢. أوجد طول وعرض قطعة الأرض.

الحل

نفرض أن العرض = x م.

وبالتالي فإن الطول = $(x+5)$ م.

ومن ثم فإن المساحة هي:

$$x(x+5)=14 \;\Rightarrow\; x^2+5x-14=0$$

$$\Rightarrow\; (x-2)(x+7)=0 \;\Rightarrow\; x-2=0 \;\; or \;\; x+7=0$$

$$\Rightarrow\; x=2 \quad or \quad x=-7 \; (\text{مرفوض})$$

وبالتالي فإن العرض هو $2\,m$، والطول هو $7\,m$.

تطبيق (١١): عدد صحيح موجب يزيد مربعه عن ضعفه بمقدار 8. أوجد هذا العدد.

الحل

نفرض أن العدد هو x، كما أن مربعه هو x^2، وأيضاً ضعفه هو $2x$.

وبالتالي فإن:

$$x^2-2x=8 \;\Rightarrow\; x^2-2x-8=0$$

$$\Rightarrow\; (x+2)(x-4)=0 \;\Rightarrow\; x+2=0 \;\; or \;\; x-4=0$$

$$\Rightarrow\; x=-2 \; (\text{مرفوض}) \quad or \quad x=4$$

وبالتالي فإن العدد هو 4.

تطبيق (١٢): عدد صحيح إذا أضيف إلى مربعه كان الناتج 56. أوجد هذا العدد.

الحل

نفرض أن العدد هو x، كما أن مربعه هو x^2.

وبالتالي فإن:

$$x^2 + x = 56 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-7)(x+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 7 = 0 \quad or \quad x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -8 \qquad or \qquad x = 7$$

وبالتالي فإن العدد هو 7 أو -8.

تطبيق (١٣): مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة يزيد عن طول ضلع القائمة الآخر بمقدار 2 سم ومساحته 24 سم^{٢} . أوجد طولي ضلعي القائمة.

الحل

نفرض أن طول أحد ضلعي القائمة هو x.

وبالتالي فإن طول ضلع القائمة الآخر هو $(x + 2)$.

ومن ثم فإن مساحة المثلث هي:

$$\frac{1}{2}x(x+2) = 24 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-6)(x+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 6 = 0 \quad or \quad x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -8 \; (\text{مرفوض}) \qquad or \qquad x = 6$$

وبالتالي فإن طولي الضلعين هما $(6 , 8)$ وذلك لأن الأطوال لا تكون سالبة.

٧/١/٢- طريقة تحليل المعادلة: $a x^2 + b x + c = 0 \;,\; a \neq \pm 1$

بنفس الطريقة التي استخدمناها سابقاً، نتبع تحليل المقدار الثلاثي في الطرف الأيسر من المعادلة. والمثالين التاليين يوضحان هذه الطريقة:

مثال (٢٢): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$3x^2 + 13x + 12 = 0$$

الحل

١ – نحلل المقدار $3x^2$ إلى عاملين هما: $(3x \;,\; x)$.

٢ – نحلل الحد الأخير 12 إلى عاملين هما: $(3,4)$ or $(2,6)$ or $(1,12)$.

وتم استبعاد أن يكون العاملين سالبين، لأن معامل x إشارته موجبة.

٣ – نجري عدة محاولات حتى نصل إلى أن (حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين = الحد الأوسط في الطرف الأيسر من المعادلة).

وبالتالي فإن:

$$3x^2 + 13x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; (3x+4)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow\; 3x + 4 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow\; x = -4/3 \quad or \quad x = -3$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-4/3, -3\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٢٣): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$14x^2 - 17x + 5 = 0$$

الحل

١ – نحلل المقدار $14x^2$ إلى عاملين هما: $(x\ ,14x)\ or\ (2x, 7x)$.

٢ – نحلل الحد الأخير 5 إلى عاملين سالبين معاً، وذلك لأن معامل x يكون عدد سالب هما: $(-1, -5)$.

وبالتالي فإن المحاولة الصحيحة هي:

$$14x^2 - 17x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; (2x-1)(7x-5) = 0$$

$$\Rightarrow\; 2x - 1 = 0 \quad or \quad 7x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow\; x = 1/2 \quad or \quad x = 5/7$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{1/2, 5/7\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

٣/١/٧- طريقة تحليل المعادلة إلى مربع كامل

لحل معادلة الدرجة الثانية باستخدام طريقة المربع الكامل، يجب أن يتحقق الآتي:

١ – أن يكون الحد الأول مربع كامل وهو موجب دائماً.

٢ – أن يكون الحد الثالث مربع كامل وهو موجب دائماً.

٣ – الحد الأوسط يساوي:

$$\pm 2\times\sqrt{\text{الحد الأول}}\times\sqrt{\text{الحد الثالث}}$$

٤ – تحليل الطرف الأيسر من المعادلة كالآتي:

$$\left(\sqrt{\text{الحد الأول}} \pm \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)^2 = 0$$

وتكون الإشارة بين الحدين داخل القوس مماثلة تماماً لإشارة الحد الأوسط من الطرف الأيسر للمعادلة بعد الترتيب تنازلياً حسب قوى x.

مثال (٢٤): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$36x^2 + 84x + 49 = 0$$

الحل

نلاحظ أن الحد الأول = $36x^2 = (6x)^2$ = مربع كامل.

كما أن الحد الثالث = $49 = (7)^2$ = مربع كامل.

وأيضاً أن الحد الأوسط = $84x = 2(6x)(7)$.

وبالتالي فإن:

$$36x^2 + 84x + 49 = 0 \;\Rightarrow\; (6x+7)^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; 6x+7 = 0 \;\Rightarrow\; 6x = -7$$

$$\Rightarrow\; x = -7/6$$

أي أن الحل هو $-7/6$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٢٥): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$25x^2 + 20x + 4 = 0$$

الحل

نلاحظ أن الحد الأول = $(5x)^2 = 25x^2$ = مربع كامل.

كما أن الحد الثالث = $4 = (2)^2$ = مربع كامل.

وأيضاً أن الحد الأوسط = $20x = 2(5x)(2)$.

وبالتالي فإن:

$$25x^2 + 20x + 4 = 0 \Rightarrow (5x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 2 = 0 \Rightarrow 5x = -2$$

$$\Rightarrow x = -2/5$$

أي أن الحل هو $-2/5$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٢٦): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$18x^2 - 48x + 32 = 0$$

الحل

بقسمة جميع حدود المعادلة على 2، نجد أن:

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة تحقق شروط إكمال المربع. أي أن:

$$9x^2 - 24x + 16 = 0 \Rightarrow (3x-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = 4/3$$

أي أن الحل هو $4/3$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٢٧): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$28x - 49x^2 - 4 = 0$$

الحل

نرتب المعادلة ترتيباً تنازلياً حسب قوى x كالآتي:

$$-49x^2 + 28x - 4 = 0$$

بضرب طرفي المعادلة في $(1-)$ نجد أن:

$$49x^2 - 28x - 4 = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة تحقق شروط إكمال المربع. أي أن:

$$49x^2 - 28x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (7x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; (7x-2) = 0 \;\Rightarrow\; 7x = 2$$

$$\Rightarrow\; x = 2/7$$

أي أن الحل هو $2/7$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

٤/١/٧- طريقة تحليل المعادلة كفرق بين مربعين

في هذه الحالة تكون المعادلة عبارة عن حدين (كميتين) فقط في الطرف الأيسر منها، كل منهما مربع كامل بينهما إشارة سالبة. وطريقة تحليل الفرق بين مربعين عبارة عن مجموع هاتين الكميتين مضروباً في الفرق بينهما.

مثال (٢٨): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2 - 4 = 0$$

الحل

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (x+2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow\; x + 2 = 0 \quad or \quad x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow\; x = -2 \quad or \quad x = 2$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-2, 2\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٢٩): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2 - 25 = 0$$

الحل

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x + 5 = 0 \quad or \quad x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -5 \quad or \quad x = 5$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-5, 5\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٠): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2 - 1 = 0$$

الحل

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \quad or \quad x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad or \quad x = 1$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-1, 1\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣١): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

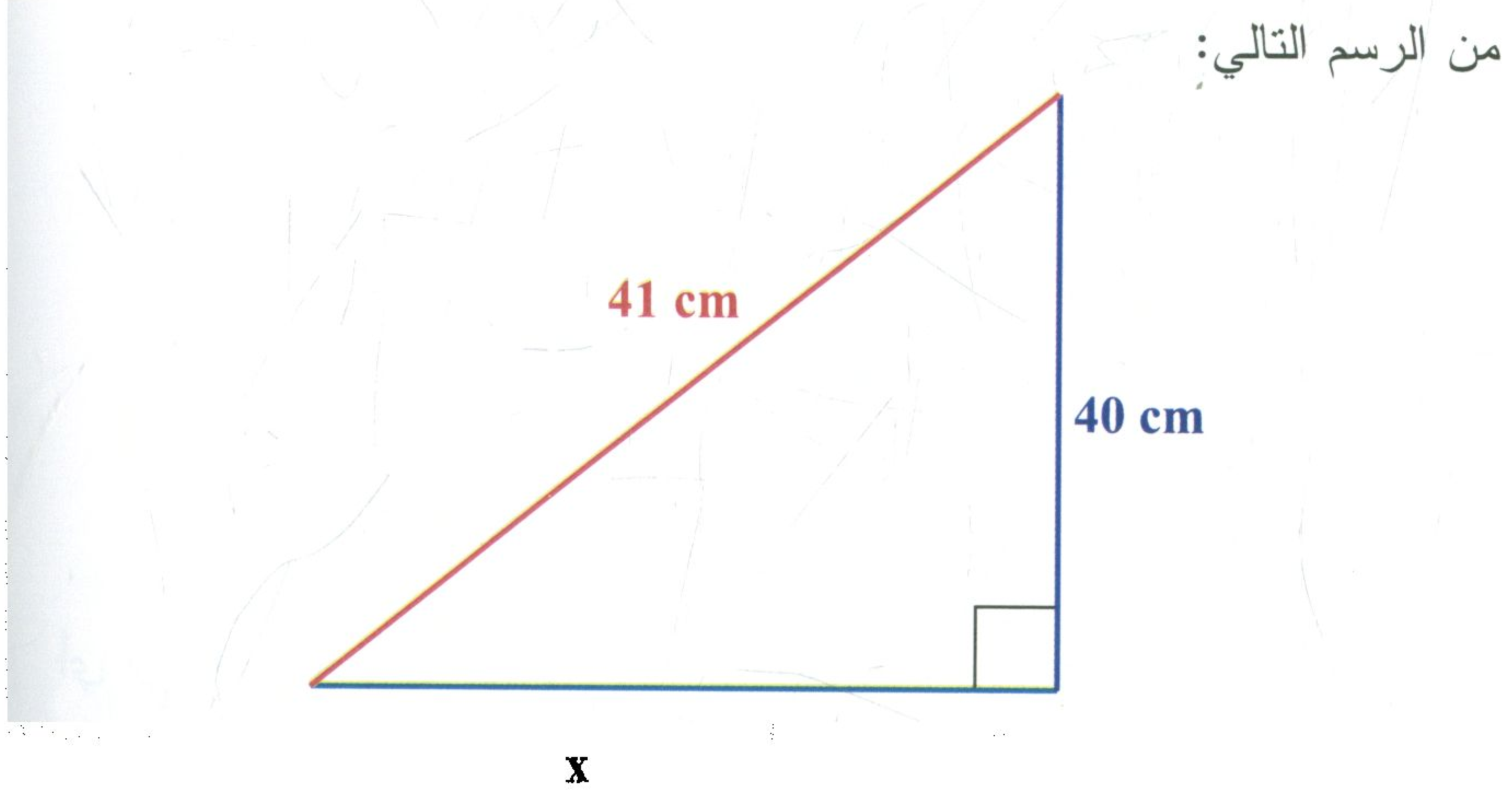
$$x^2 - 16 = 0$$

الحل متروك للقارئ

تطبيق (١٤): مثلث قائم الزاوية طول وتره يساوي *41* سم، وطول أحد ضلعي القائمة يساوي *40* سم. استخدم طريقة تحليل الفرق بين مربعين لإيجاد طول ضلع القائمة الآخر.

الحل

من الرسم التالي:



باستخدام قاعدة فيثاغورث نجد أن:

$$(41)^2 = x^2 + (40)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = (41)^2 - (40)^2$$

حيث إن الطرف الأيمن من المعادلة عبارة عن فرق بين مربعين، وبالتالي فإن:

$$x^2 = (41+40)\times(41-40) = (81)\times(1) = 81$$

$$\Rightarrow \quad x = 9$$

أي أن طول ضلع القائمة الآخر يساوي *9*.

٥/١/٧- طريقة التحليل بإكمال المربع

هذه الطريقة تتناول معادلة من الدرجة الثانية تحتوي على مقادير ليست كلها مربعات كاملة، ولكن يمكن إكمالها بصورة تكتب كالآتي:

مقدار ثلاثي مربع كامل – مقدار واحد مربع كامل

وبعد ذلك يمكن تحليلها باستخدام طريقة تحليل الفرق بين مربعين. وهذه الطريقة تعتمد في حلها على إضافة مقدار ثابت يساوي مربع نصف معامل x، ثم نطرحه حتى لا يتغير المقدار، ثم نحلل المقدار الناتج كفرق بين مربعين.

مثال (٣٢): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$(x+2)^2 = 25$$

الحل

يمكن كتابة المعادلة كالآتي:

$$(x+2)^2 - 25 = 0$$

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$(x+2+5)(x+2-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+7)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x+7=0 \quad or \quad x-3=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-7 \quad or \quad x=3$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{\,3\,,-7\,\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٣): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2 + 12x = 0$$

الحل

لحل هذه المعادلة نضيف إلى حدودها $\left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2$ ثم نطرحه، فتصبح المعادلة:

$$x^2 + 12x = x^2 + 12x + \left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 12x + 36 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+6)^2 - 36 = 0$$

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$(x+6+6)(x-6+6)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+12)x=0$$

$$\Rightarrow \quad x+12=0 \quad or \quad x=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-12 \quad or \quad x=0$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{-12\,,0\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٤): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2-6x+5=0$$

الحل

لحل هذه المعادلة نضيف إلى حدودها $\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2$ ثم نطرحه، فتصبح المعادلة:

$$x^2-6x+5=x^2-6x+5+\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-6x+5+9-9=0$$

$$x^2-6x+9-4=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2-(2)^2=0$$

نلاحظ أن المعادلة عبارة عن الفرق بين مربعين، فيكون حلها كالآتي:

$$(x-3+2)(x-3-2)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \quad x-1=0 \quad or \quad x-5=0$$

$$\Rightarrow \quad x=1 \quad or \quad x=5$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{1\,,5\}$. ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٥): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

الحل متروك للقارئ

٦/١/٧- طريقة حل المعادلة باستخدام القانون العام

تستخدم هذه الطريقة لحل معادلة الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a , b , c \in R \; , \; a \neq 0$$

في جميع الحالات سابقة الذكر، وتعتبر هذه الطريقة هي الأشمل والأعم. ويكون الحل باستخدام القانون العام كالآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

هذان الحلان يعتمدان على قيمة المقدار $\sqrt{b^2 - 4ac}$. كما يسمى المقدار $(b^2 - 4ac)$ بمميز المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$. وهذا المميز يحدد نوع جذري المعادلة كما يلي:

١ - إذا كان $(b^2 - 4ac = 0$ = المميز$)$، فيكون الحل هو:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

وهو جذر حقيقي وحيد ومكرر.

٢ - إذا كان $(b^2 - 4ac > 0$ = المميز$)$، فإنه يوجد في هذه الحالة جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad or \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

٣ - إذا كان $(b^2 - 4ac < 0$ = المميز$)$، فإن $\sqrt{b^2 - 4ac}$ لا ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية R.

مثال (٣٦): استخدم القانون العام في إيجاد حل المعادلة:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

الحل

حيث إن:

$$a = 1 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = 6$$

وبالتالي فإن:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{6}{2} = 3 \quad or \quad x = \frac{4}{2} = 2$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{3, 2\}$.ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٧): استخدم القانون العام في إيجاد حل المعادلة:

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

الحل

حيث إن:

$$a = 4 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -1$$

وبالتالي فإن:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(4)(-1)}}{2 \times 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8}{8} = 1 \quad or \quad x = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

أي أن مجموعة الحل هي $\left\{1, -\frac{1}{4}\right\}$.ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٨): استخدم القانون العام في إيجاد حل المعادلة:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

الحل

حيث إن:

$$a = 1 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = -14$$

وبالتالي فإن:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(1)(-14)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{14}{2} = 7 \quad or \quad x = \frac{-4}{2} = -2$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{7, -2\}$.ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٣٩): استخدم القانون العام في إيجاد حل المعادلة:

$$x^2 - 9 = 0$$

الحل

حيث إن:

$$a = 1 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = -9$$

وبالتالي فإن:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(1)(-9)}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \quad or \quad x = -3$$

أي أن مجموعة الحل هي $\{3, -3\}$.ويمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيمة x في المعادلة الأصلية.

مثال (٤٠): استخدم القانون العام في إيجاد حل المعادلة:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

الحل متروك للقارئ

٧/١/٧- تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية الجذرين

إذا عُلم جذري المعادلة وكان المطلوب تكوين معادلة الدرجة الثانية، فإنها تأخذ الصيغة الآتية:

x^2 − (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

مثال (٤١): كَوِّن المعادلة من الدرجة الثانية التي جذراها هما: $(7\ ,\ -2)$

الحل

١ – مجموع الجذرين = $5 = 7 - 2$.

٢ – حاصل ضرب الجذرين = $-14 = (7)(-2)$.

٣ – المعادلة هي:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

مثال (٤٢): كَوِّن المعادلة من الدرجة الثانية التي جذراها هما: $(3\ ,\ -3)$

الحل

١ – مجموع الجذرين = $0 = 3 - 3$.

٢ – حاصل ضرب الجذرين = $-9 = (3)(-3)$.

٣ – المعادلة هي:

$$x^2 - 9 = 0$$

مثال (٤٣): كَوِّن المعادلة من الدرجة الثانية التي جذراها هما: $(3\ ,\ 2)$

الحل متروك للقارئ

٢/٧- معادلة من الدرجة الثانية في مجهولين (معادلة الدائرة) :

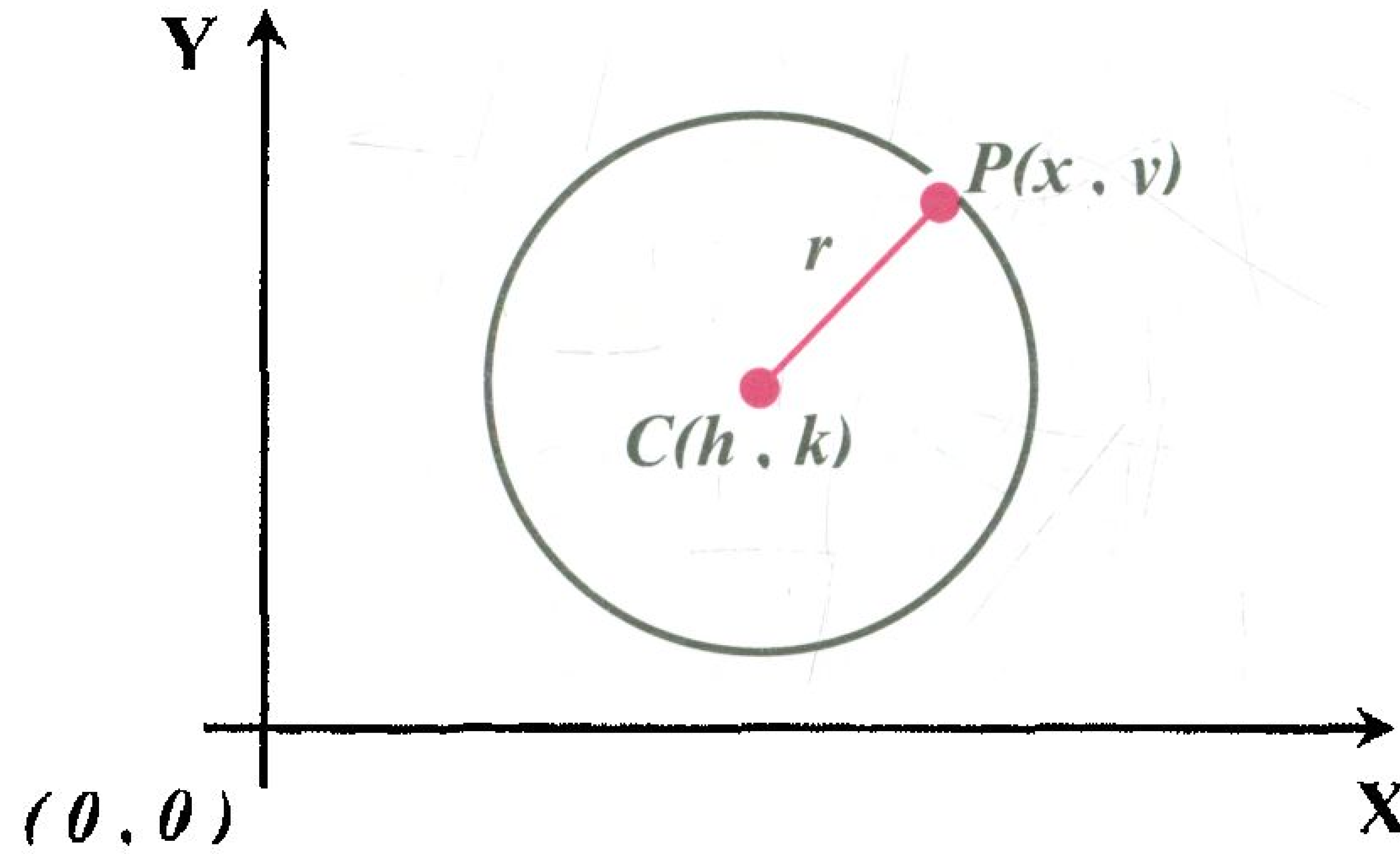
معادلة الدرجة الثانية في مجهولين (متغيرين) $x\ ,y$ تأخذ الصورة التالية:

$$a x^2 + b y^2 + c x + d y + r = 0$$

حيث $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ r$ ثوابت تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R. ويمكن أن تمثل هذه المعادلة دائرة، أو قطع مكافئ، أو قطع ناقص، أو قطع زائد. وفي هذا

الجزء من الفصل نحن بصدد دراسة معادلة الدائرة، التي هي حالة من حالات معادلة الدرجة الثانية.

معادلة الدائرة هي مسار هندسي لنقطة $P(x, y)$ تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة $C(h, k)$ (تسمى مركز الدائرة) هو مقداراً ثابتاً r (يسمى نصف قطر الدائرة)، كما يوضحها الشكل التالي:



من تعريف المسافة (البعد) بين نقطتين نجد أن:

$$|PC| = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

بتربيع طرفي المعادلة السابقة نحصل على المعادلة العامة للدائرة بدلالة مركزها (h,k) ونصف قطرها r كما يلي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ويمكن كتابة الصورة العامة لمعادلة الدائرة كما يلي:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + c^2 = 0$$

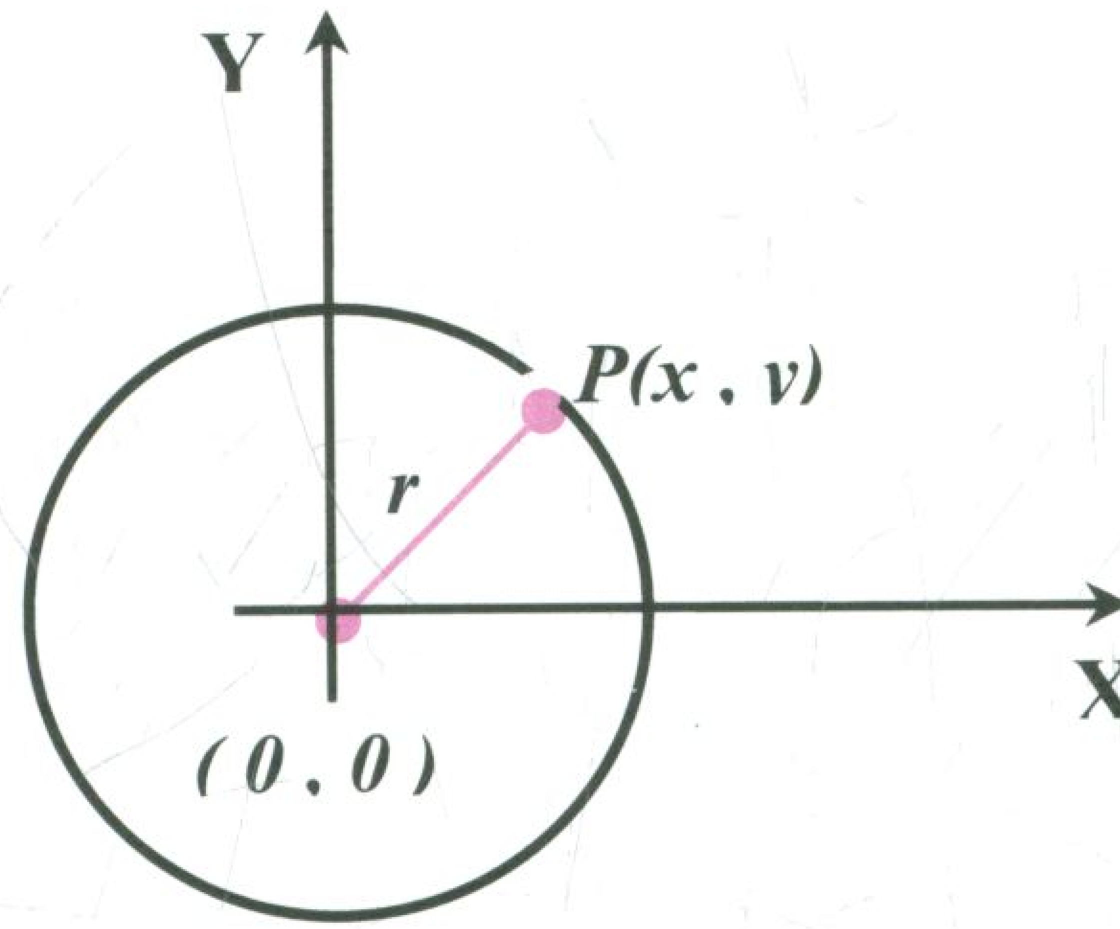
حيث $c^2 = h^2 + k^2 - r^2$.

حالة خاصة

إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل $(0, 0)$، فإن معادلة الدائرة في هذه الحالة هي:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

كما يوضحها الشكل التالي:



ملاحظات

لكي تكون معادلة الدرجة الثانية في مجهولين تمثل معادلة دائرة يجب أن تحقق الخواص التالية:

أ – يجب أن تكون المعادلة من الدرجة الثانية في كل من x و y.

ب – يجب أن تكون المعادلة خالية من الحد xy.

ج – يجب أن يكون معامل x^2 مساوياً لمعامل y^2 .

مثال (٤٤): أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(1 , -3)$ ونصف قطرها ثلاث وحدات.

الحل

حيث إن $(h , k) = (1 , -3)$ كما أن $r = 3$، وبالتالي فإن معادلة الدائرة هي:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$$

مثال (٤٥): أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

الحل

حيث إن $(h , k) = (0 , 0)$ كما أن $r = 5$، وبالتالي فإن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 = 25$$

مثال (٤٦): أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$$

الحل

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة العامة للدائرة:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + c^2 = 0$$

نجد أن:

$$4 = -2h \Rightarrow h = -2,$$
$$-12 = -2k \Rightarrow k = 6,$$

$$c^2 = 4 = h^2 + k^2 - r^2 = 4 + 36 - r^2 = 40 - r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

وبالتالي فإن مركز الدائرة هو $(h, k) = (-2, 6)$ كما أن نصف قطرها هو $r = 6$.

تمارين

١ – بين أياً من الأزواج المرتبة:

$i)(1,2)$ $ii)(3\ ,-5)$ $iii)(-1,3)$

يحقق المعادلة الخطية:

$y-4x=7$

٢- أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كلاً من المعادلات الخطية الآتية:

$i)2x-y=5$

$ii)y=\frac{1}{2}x+5$

$iii)2x=5$

٣ – إذا كان الزوج المرتب $(-3,2)$ يحقق المعادلة:

$3x+ky=1$

أوجد قيمة الثابت k.

٤ – إذا كان الزوج المرتب $(3k,2k)$ يحقق المعادلة:

$x-3y=9$

أوجد قيمة الثابت k.

٥ – إذا كان الخط المستقيم الذي معادلته:

$2x-y=a$

يقطع محور السينات في النقطة $(3,b)$. أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$.

٦ – مستطيل محيطه $14\ cm$، أوجد جميع القيم المختلفة لكل من طوله وعرضه. علماً بأن كلاً منهما عدد صحيح موجب.

٧ – عددان طبيعيان زوجيان، ضعف أولهما مضافاً إليه ثانيهما يساوي 12. أوجد القيم المختلفة للعددين.

٨ – إذا كان ثمن طاولة كمبيوتر 100 ريال سعودي، وثمن الكرسي 50 ريال، فإذا باع مركز الحاسب في أحد الأيام بمبلغ 500 ريال. أوجد القيم المختلفة لعدد الطاولات وعدد الكراسي التي باعها المركز. ثم مثل هذه العلاقة بيانياً.

٩ – مثلث متساوي الساقين محيطه يساوي $19\ cm$. أوجد جميع القيم المختلفة لأطوال أضلاعه. علماً بأن أطوال أضلاع المثلث هي أعداد صحيحة موجبة.

١٠ – أثبت أن المثلث الذي رؤوسه $P_1(0,2)\,,\,P_2(-3\;,-1)\;,\;P_3(-4,3)$ يكون مثلث متساوي الساقين.ثم أوجد محيطه.

١١ – أثبت أن المثلث الذي رؤوسه $P_1(6,-7)\,,\,P_2(11\;,-3)\;,\;P_3(2,-2)$ يكون مثلث قائم الزاوية.ثم أوجد محيطه ومساحته.

١٢ – أثبت أن النقاط $P_1(-2,9)\,,\,P_2(4\;,6)\;,\;P_3(1,0)\;,\;P_4(-5,3)$ تكون رؤوس مربع.ثم أوجد محيطه ومساحته.

١٣ – إذا كان ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(3,k)\,,\,(1\;,3)$ يساوي 3. أوجد قيمة الثابت k.

١٤ – إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(3,4)\,,\,(2\;,k)$ موازياً لمحور السينات. أوجد قيمة الثابت k.

١٥ – إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2x,3)\,,\,(6\;,7)$ موازياً لمحور الصادات. أوجد قيمة x.

١٦– إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(3,6)\,,\,(-2\;,3y)$ عمودياً على محور الصادات. أوجد قيمة y.

١٧ – هل النقاط $P_1(-5,11)\,,\,P_2(0\;,8)\,,\,P_3(5,5)$ تقع على استقامة واحدة؟.

١٨ – أثبت أن النقاط $P_1(4,-3)\,,P_2(-6,7)\,,P_3(5,-4)$ تقع على استقامة واحدة.

١٩ – أثبت أن النقاط الثلاثة $(7,2),\,(3,1),\,(-1,2)$ لا تقع على استقامة واحدة.

٢٠ – إذا كانت النقاط الثلاثة $P_1(4,1)\;,\;P_2(-2,7)\;,\;P_3(3,y)$ تقع على استقامة واحدة. أوجد قيمة y.

٢١ – إذا كانت الخط المستقيم المار بالنقاط $P_1(3,-1)\;,\;P_2(x,1)\;,\;P_3(9,y)$ له ميل يساوي $\frac{2}{3}$. أوجد قيمة كلاً من $x\,,\,y$.

٢٢ – سيارة تسير بسرعة منتظمة بحيث تقطع *180* كيلو متر كل ثلاث ساعات، فإذا سارت السيارة لمدة خمس ساعات. أوجد المسافة التي تقطعها السيارة.

٢٣ – آلة ري تستهلك *2.47* لتراً من السولار لتشغيلها ثلاث ساعات، فإذا عملت الآلة *10* ساعات متتالية. أوجد عدد اللترات من السولار التي يمكن أن تستهلكها الآلة.

٢٤ – ملأ شخص خزان سيارته بالوقود، فإذا كانت سعة الخزان **40** لتراً، وبعد أن قطع مسافة **120** كيلو متر، وجد أن مؤشر عداد الوقود بالسيارة بـه **3/4** من سعته.

أ – ارسم الشكل البياني للعلاقة بين المسافة المقطوعة وكمية الوقود بالخزان.

ب – احسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ خزان الوقود.

٢٥ – سجلت سيارة تسير بسرعة منتظمة أثناء حركتها المسافات التي تبعدها عن نقطة ثابتة بالكيلو متر بعد مرور فترات زمنية مقاسة بالساعات من بدء حركتها كما يوضحها الجدول الآتي:

المسافات بالكيلو متر	150	300	350	400
الزمن بالساعات	2	4	6	8

مثل بيانياً العلاقة بين المسافة التي تبعدها السيارة عن النقطة الثابتة والزمن المنقضي. ثم أوجد:

أ – سرعة السيارة بالكيلو متر لكل ساعة.

ب – المسافة التي تبعدها السيارة عن النقطة الثابتة بعد مرور **300** دقيقة.

ج – الزمن الذي تكون عنده السيارة على بعد **375** كيلو متر من النقطة الثابتة.

د – بعد نقطة البداية للسيارة عن النقطة الثابتة.

٢٦ – أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$i) x^2 + 56 - 15x = 0 \quad , \quad ii) x^2 - 17x + 30 = 0$

$iii) 15x + x^2 - 34 = 0 \quad , \quad iv) x^2 + 21 - 10x = 0$

٢٧ – أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$i) 2x^2 - x - 6 = 0 \quad , \quad ii) 6x - 27 + 5x^2 = 0$

$iii) 8x^2 + 2x - 3 = 0 \quad , \quad iv) 6x^2 - 21x + 8 = 0$

٢٨ – أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$i) 25x^2 - 5x + 1 = 0 \quad , \quad ii) 12x^2 - 16x + 4 = 0$

$iii) 16x^2 - 24x - 9 = 0 \quad , \quad iv) 36 - 60x + 25x^2 = 0$

٢٩ – أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$i) x^2 - 9 = 0$, $ii) 49x^2 - 1 = 0$

$iii) \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4} = 0,$ $iv) 3x^2 - 27 = 0$

٣٠ – إذا كان:

$$x^2 - a = (x-3)(x+3)$$

أوجد قيمة الثابت a.

٣١ – إذا كان:

$$x^2 + a - 4 = (x-2)(x+2)$$

أوجد قيمة الثابت a.

٣٢ – أوجد الحل العام للمعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$i) x - \frac{2}{x} = \frac{7}{2}$, $ii) 9x^2 - 6x + 1 = 0$

$iii) x + \frac{2}{x} = 3$, $iv) x^2 - \frac{7x}{3} = -\frac{4}{3}$

٣٣ – إذا كان 3 , 2 جذران للمعادلة:

$$x^2 - bx + c = 0$$

أوجد قيمة الثابتين b , c.

٣٤ – ثلاثة أعداد زوجية موجبة متتالية، يزيد مربع أوسطها عن مجموع العددين الآخرين بمقدار 8، أوجد هذه الأعداد الثلاثة.

٣٥ – عدد صحيح موجب يزيد مربعه عن خمسة أمثاله بمقدار 36، أوجد هذا العدد.

٣٦– عدد صحيح موجب إذا أُضيف إلى ضعف مربعه 7 كان الناتج 135. أوجد هذا العدد.

٣٧ – عدد صحيح موجب مربعه يساوي ستة أمثاله. أوجد هذا العدد.

٣٨ – عدد حقيقي إذا أُضيف إليه مربعه كان الناتج 12. أوجد هذا العدد.

٣٩ – ثلاثة أعداد صحيحة متتالية مجموعها يساوي مربع العدد الأوسط. أوجد هذه الأعداد.

٤٠ – عدد صحيح موجب إذا أُضيف ضعف مربعه إلى معكوسه الجمعي كان الناتج 91. أوجد هذا العدد.

٤١ – إذا كان عمر محمود الآن يزيد عن عمر منار بمقدار أربع سنوات، ومجموع مربع عمريهما الآن يساوي 520 سنة. أوجد عمر كل منهما الآن.

٤٢ – إذا كان عمر محمد الآن ضعف عمر مصطفى، ومنذ سنتين كان الفرق بين مربعي عمريهما 260 سنة. أوجد عمر كل منهما الآن.

٤٣ – قطعة أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار 4 م. فإذا كانت مساحتها 21 م٢. أوجد محيط قطعة الأرض.

٤٤ – مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة $(x+5),(5x+3)$ من السنتيمترات، ومساحته 24 سم٢. احسب محيط المثلث.

٤٥ – مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه $2x\,,(2x+1),(x-11)$ من السنتيمترات، أحسب قيمة x، ثم أوجد محيط المثلث ومساحته.

٤٦ – قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها، وإذا زاد طولها بمقدار 1 م، ونقص عرضها بمقدار 1 م لنقصت المساحة 7 م٢. أوجد بعدي قطعة الأرض.

٤٧ – أيٌّ من المعادلات التالية تمثل معادلة دائرة، وإذا كانت أوجد مركزها ونصف قطرها:

$i)\ 2x^2+3y^2-2x+6y+10=0$

$ii)\ x^2+y^2-6x-4y+4=0$

$iii)\ x^2+y^2+3xy+12=0$

$iv)\ 2x^2+2y^2-x+y=1$

٤٨ – أوجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

أ – المركز $(1\,,2)$ ونصف القطر 10 وحدات.

ب – المركز نقطة الأصل ونصف القطر 5 وحدات.

ج – المركز $(2\,,7)$ ونصف القطر 3 وحدات.

الفصل الخامس

متباينات الدرجة الأولى والثانية وتطبيقاتها

FIRST AND SECOND DEGREE INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

مقدمة Introduction

نعلم من الفصل السابق أن المعادلــــة هي متســـاوية على الصورة $P(x)=0$ ، أما المتباينـــة فهي تعبير رياضي (جبري) يأخذ إحدى الصور التالية التي تحتوي على متغير واحد فقط:

$$P(x)\geq 0 \quad or \quad P(x)>0 \quad or \quad P(x)\leq 0 \quad or \quad P(x)<0$$

في هذا الفصل ندرس المتباينات من الدرجة الأولى (المتباينات الخطيـــة) ومـــن الدرجة الثانية (متباينات غير خطية) التي تحتوي على متغير واحد فقط وأيضاً علـــى متغيرين وتطبيقات عملية عليها، والتي تهدف إلى إيجاد مجموعة كل الحلول الممكنـــة داخل فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية.

أولاً: متباينات الدرجة الأولى First Order Inequalities

تنقسم متباينات الدرجة الأولى إلى نوعين أساسيين هما:

١/١- متباينات الدرجة الأولى في متغير واحد

المتباينات من الدرجة الأولى في مجهول واحد تأخذ إحدى الصور:

$$a\,x+b\geq c \quad or \quad a\,x+b>c \quad or \quad a\,x+b\leq c \quad or \quad a\,x+b<c$$

$$or \quad -c\leq a\,x+b\leq c \quad , \quad a,b,c\in R \;,\; a\neq 0$$

الحل العام لهذه المتباينة يعني إيجاد قيم المتغير x والذي يحقق المتباينة ويقع داخل فترة تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية R.

خواص المتباينات

تعتمد طرق حل المتباينات أساساً على خواص علاقة التباين والتي نلخصها في الآتي:

$i)\; a\leq b \;\leftrightarrow\; a+c\leq b+c$ (c موجبة أو سالبة)

$ii)\; a\leq b \;\leftrightarrow\; a\,c\leq b\,c$ (c موجبة)

$iii)\; a\leq b \;\leftrightarrow\; a\,c\geq b\,c$ (c سالبة)

$iv)\; a\leq b \;\leftrightarrow\; \dfrac{1}{a}\geq\dfrac{1}{b}$

أي أنه عند الضرب في أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه علامة المتباينة.

مثال (١): أوجد الحل العام للمتباينة:

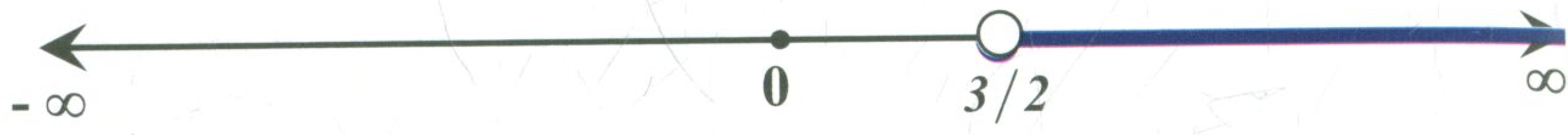
$$5\,x-7>3\,x-4$$

الحل

يمكن استخدام خواص المتباينات لإيجاد الحل العام للمتباينة كالآتي:

$$5\,x-3\,x>7-4 \;\Rightarrow\; 2x>3 \;\Rightarrow\; x>\frac{3}{2}$$

وبالتــــالي فإن الحـــل باســـتخدام الفتـــرات هو $\left(\frac{3}{2} , \infty\right)$، وباستخدام المجموعـــات هو $\left\{x:\ x > \frac{3}{2}\right\}$، ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كما يلي:



مثال (٢): أوجد الحل العام للمتباينة:

$$5x - 7 \le 2x - 1$$

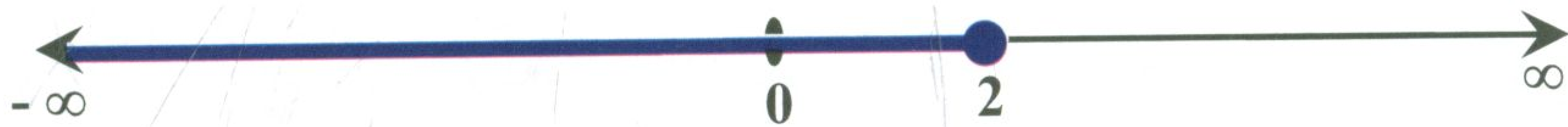
الحل

يمكن استخدام خواص المتباينات لإيجاد الحل العام للمتباينة كالآتي:

$$5x - 2x \le 7 - 1 \;\Rightarrow\; 3x \le 6$$

$$\Rightarrow\; x \le 2$$

وبالتــــالي فإن الحـــل باســـتخدام الفتـــرات هو $(-\infty , 2]$، وباستخدام المجموعـــات هو $\{x:\ x \le 2\}$، ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كما يلي:



مثال (٣): أوجد الحل العام للمتباينة:

$$x - 1 \le 4x + 5 < x + 17$$

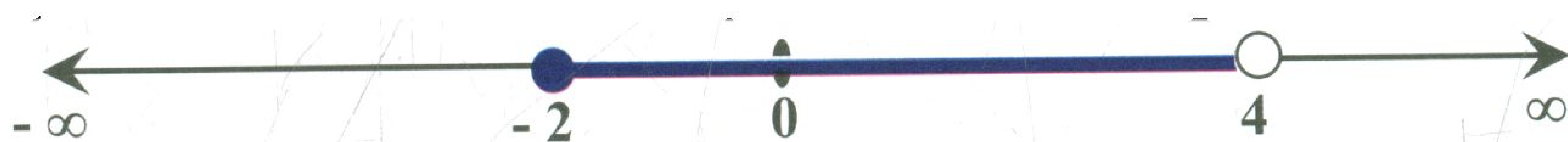
الحل

يمكن استخدام خواص المتباينات لإيجاد الحل العام للمتباينة كالآتي:

$$-1 \le 3x + 5 < 17 \;\Rightarrow\; -6 \le 3x < 12$$

$$\Rightarrow\; -2 \le x < 4$$

وبالتــــالي فإن الحـــل باســـتخدام الفتـــرات هو $[-2 , 4)$، وباستخدام المجموعات هو $\{x:\ -2 \le x < 4\}$، ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كما يلي:



مثال (٤): أوجد الحل العام للمتباينة:

$$2x-2 \le 3x-1 \le x+5$$

الحل

يمكن تجزئة المتباينة إلى متباينتين، نظراً لأن معامل x في الطرف الأيمن والطرف الأيسر من المتباينة غير متساويين. أي أن:

$$2x-2 \le 3x-1$$

باستخدام خواص المتباينات نجد أن:

$$2x-2 \le 3x-1 \;\Rightarrow\; -x \le 1$$

$$\Rightarrow\; x \ge -1 = [-1\,,\infty) = \{x : x \ge -1\}$$

بالمثل يمكن حل الطرف الآخر من المتباينة كالآتي:

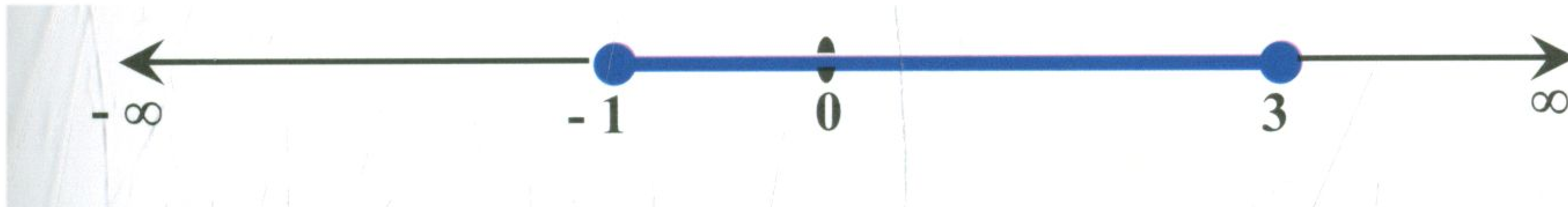
$$3x-1 \le x+5 \;\Rightarrow\; 2x \le 6$$

$$\Rightarrow\; x \le 3 = (-\infty\,, 3] = \{x : x \le 3\}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمتباينة الأصلية في هذه الحالة ينتج من خلال تقاطع الفترة الأولى مع الفترة الثانية. أي أن:

$$[-1\,,\infty) \cap (-\infty\,, 3] = [-1\,, 3]$$

ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كالآتي:



مثال (٥): أوجد الحل العام للمتباينة المركبة:

$$2x+5 \ge 0 \quad or \quad 4x-3 < 0$$

الحل

يمكن تجزئة المتباينة إلى متباينتين كالآتي:

$$2x+5 \ge 0$$

باستخدام خواص المتباينات نجد أن:

$$2x+5 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2x \ge -5$$

$$\Rightarrow \quad x \geq -5/2 = [-5/2 , \infty) = \{x : x \geq -5/2\}$$

بالمثل يمكن حل المتباينة الثانية كالآتي:

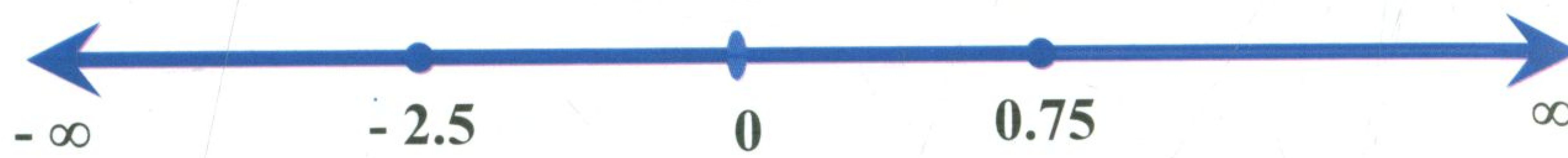
$$4x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 4x < 3$$

$$\Rightarrow \quad x < 3/4 = (-\infty , 3/4) = \{x : x < 3/4\}$$

وبالتـــالي فإن الحـــل العام للمتباينة الأصلية في هذه الحالة ينتج من خلال اتحاد الحل لكل من المتباينتين. أي أن:

$$(-\infty , 3/4) \cup [-5/2 , \infty) = (-\infty , \infty)$$

ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كالآتي:



مثال (٦): أوجد الحل العام للمتباينة:

$$|4x - 5| < 2$$

الحل

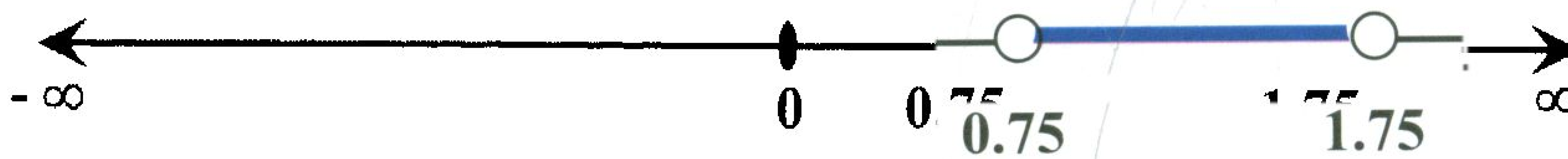
من خواص القيمة المطلقة الواردة في الفصل الرابع نجد أن:

$$|4x - 5| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < 4x - 5 < 2$$

باستخدام خواص المتباينات نجد أن:

$$3 < 4x < 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} < x < \frac{7}{4} = \left(\frac{3}{4} , \frac{7}{4}\right) = \left\{x : \frac{3}{4} < x < \frac{7}{4}\right\}$$

ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كالآتي:



مثال (٧): أوجد الحل العام للمتباينة:

$$\left|\frac{x}{2} + 3\right| > 5$$

الحل

من خواص القيمة المطلقة الواردة في الفصل الرابع نجد أن:

$$\left|\frac{x}{2}+3\right|>5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}+3>5 \quad or \quad \frac{x}{2}+3<-5$$

يمكن تجزئة المتباينة المركبة إلى متباينتين كالآتي:

$$\frac{x}{2}+3>5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}>2 \quad \Rightarrow \quad x>4=(4\ ,\infty)=\{x: x>4\}$$

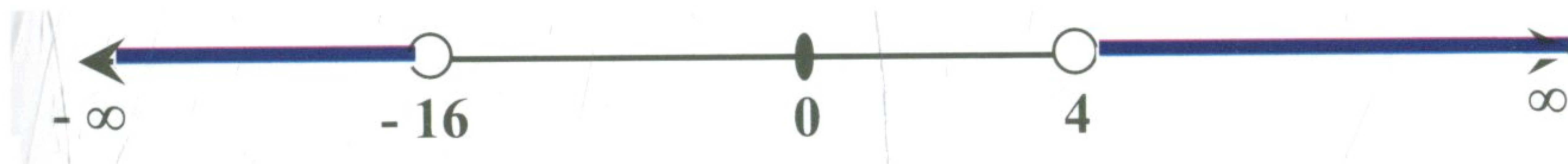
بالمثل يمكن حل المتباينة الثانية كالآتي:

$$\frac{x}{2}+3<-5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}<-8 \quad \Rightarrow \quad x<-16=(-\infty\ ,-16)$$

وبالتــالي فإن الحــل العام للمتباينة الأصلية في هذه الحالة ينتج من خلال اتحاد الحل لكل من المتباينتين. أي أن: $(-\infty\ ,-16)\cup(4\ ,\infty)$

ويمكن تمثيل ذلك الحل باستخدام خط الأعداد الحقيقية كالآتي:



٢/١- متباينات الدرجة الأولى في متغيرين

نعلم من الفصل الرابع أن المعادلة:

$$a\,x+b\,y=c \quad , \quad a,b,c\in R$$

هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين $x\,,y$، ولها عدد لا نهائي من الحلول والتي تم تمثيلها بيانياً بخط مستقيم. أما إذا كان المطلوب حل متباينــة فــي متغيــرين $x\,,y$ بالصورة:

$$a\,x+b\,y>c \quad , \quad a,b,c\in R$$

فنتعامل في هذا الجزء من الفصل مع التمثيل البياني. مع إتباع الخطوات التالية:

١ – نرسم محورين هما X, Y يتقاطعان عند نقطة الأصل O. كما هو مذكور في الفصل الرابع.

٢ – نرسم الخط المستقيم (L) بالطريقة التي اتبعناها في الفصل الرابع الذي معادلته:

$$ax+by=c \quad , \quad a,b,c\in R$$

٣ – نختار أي نقطة (x_1 , y_1) تنتمي إلى أحد جانبي المنطقة التي يقسمها الخط المستقيم. للسهولة نختار نقطة الأصل $(0 , 0)$ في حالة ما إذا كان الخط المستقيم L لا يمر بها.

٤ – نعوض بالنقطة (x_1 , y_1) أو نقطة الأصل $(0 , 0)$،فإذا تحققت المتباينة، فإن الجانب الذي تقع فيه هذه النقطة يكون منطقة الحل (مجموعة الحل) للمتباينة المذكورة. أما إذا لم تتحقق المتباينة، فيكون الجانب الذي لا تقع فيه هذه النقطة يكون منطقة الحل (مجموعة الحل) للمتباينة المذكورة، ويكون الخط متقطعاً.

٥ – إذا كانت المتباينة تشتمل على العلامة $\geq$ فإن جميع نقاط الخط المستقيم L تنتمي إلى منطقة الحل (مجموعة حل المتباينة)، وفي هذه الحالة نرسم خطاً متصلاً.

مثال (٨): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$x-3y\leq 3$$

الحل

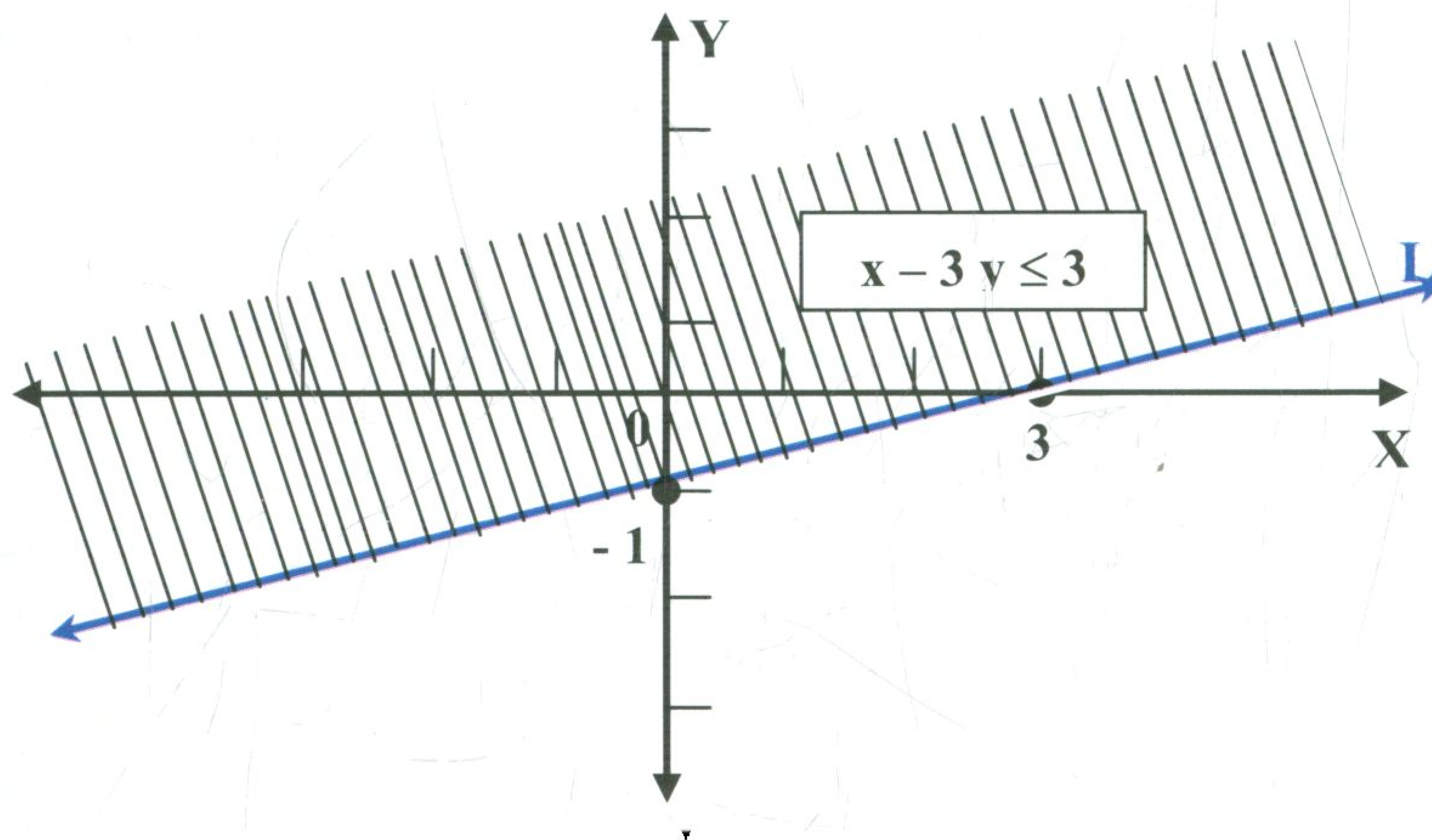
لإيجاد مجموعة حل المتباينة المذكورة، نرسم الخط المستقيم:

$$x-3y=3$$

بيانياً بشكل متصل وذلك لوجود علامة $\leq$. نوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق هذه المعادلة كما في الجدول التالي:

x	0	3	6
y	-1	0	1

يمكن رسم الخط المستقيم بالطرق التي اتبعناها في الفصل الرابع كما في الشكل التالي:



بالتعويض عن النقطة $(0\ ,\ 0)$، نجد أن المتباينة تتحقق، وبالتالي فإن مجموعة الحل (منطقة الحل) هي الجانب الأعلى المظلل من الخط المستقيم L بما فيها جميع نقاط الخط المستقيم كما يوضحها الشكل السابق.

مثال (٩): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$3x + 2y > 6$$

الحل

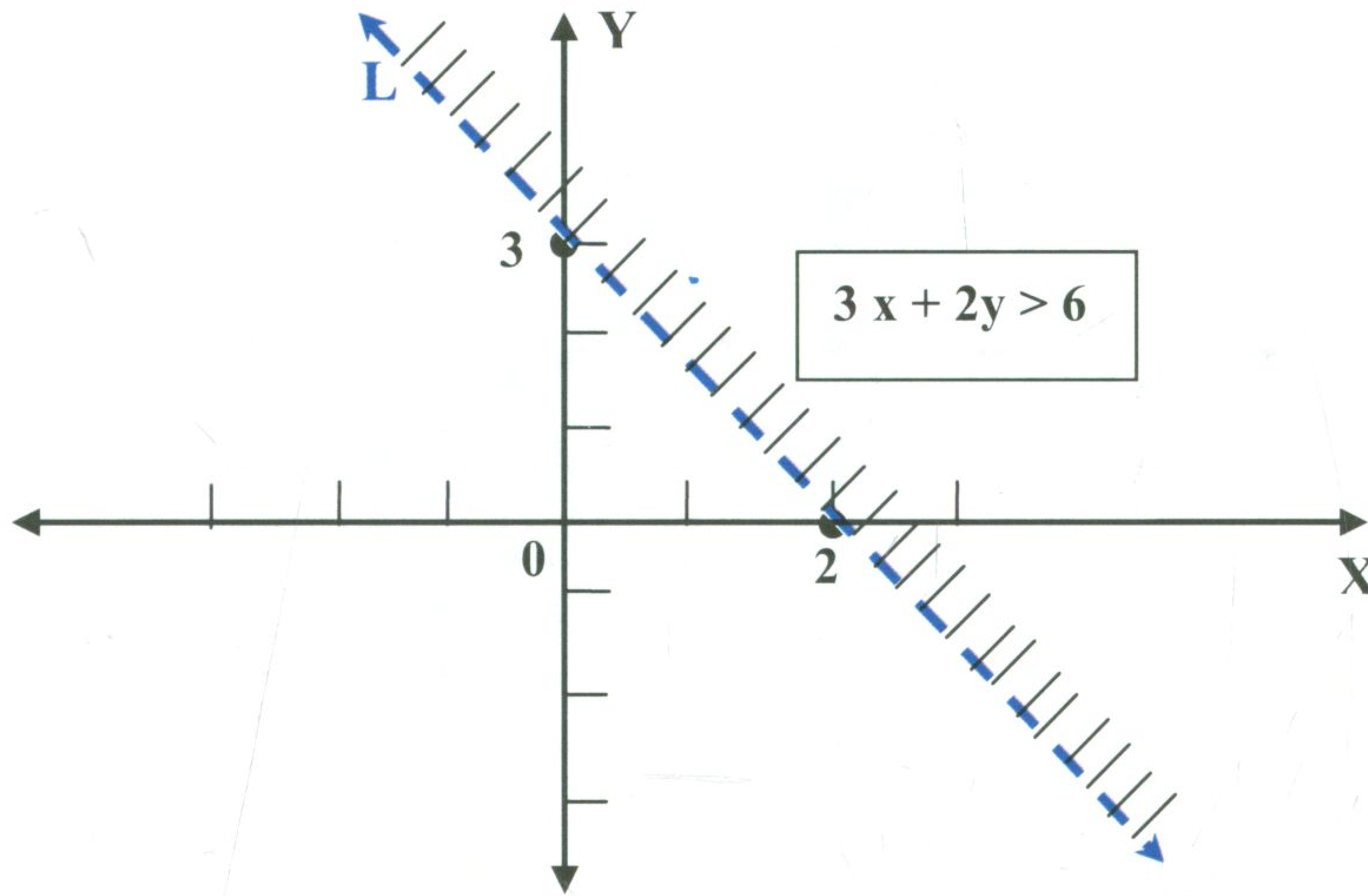
لإيجاد مجموعة حل المتباينة المذكورة، نرسم الخط المستقيم:

$$3x + 2y = 6$$

بيانياً بشكل متقطع وذلك لوجود علامة >. نوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق هذه المعادلة كما في الجدول التالي:

x	0	2	4
y	3	0	-3

يمكن رسم الخط المستقيم بالطرق التي اتبعناها كما في الشكل التالي:



بالتعويض عن النقطة $(0 , 0)$، نجد أن المتباينة لا تتحقق، وبالتالي فـإن مجموعـة الحل (منطقة الحل) هي الجانب الأعلى المظلل من الخط المستقيم L ليس فيها نقـاط الخط المستقيم كما يوضحها الشكل السابق.

مثال (١٠): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$3x+4y<12$$

الحل

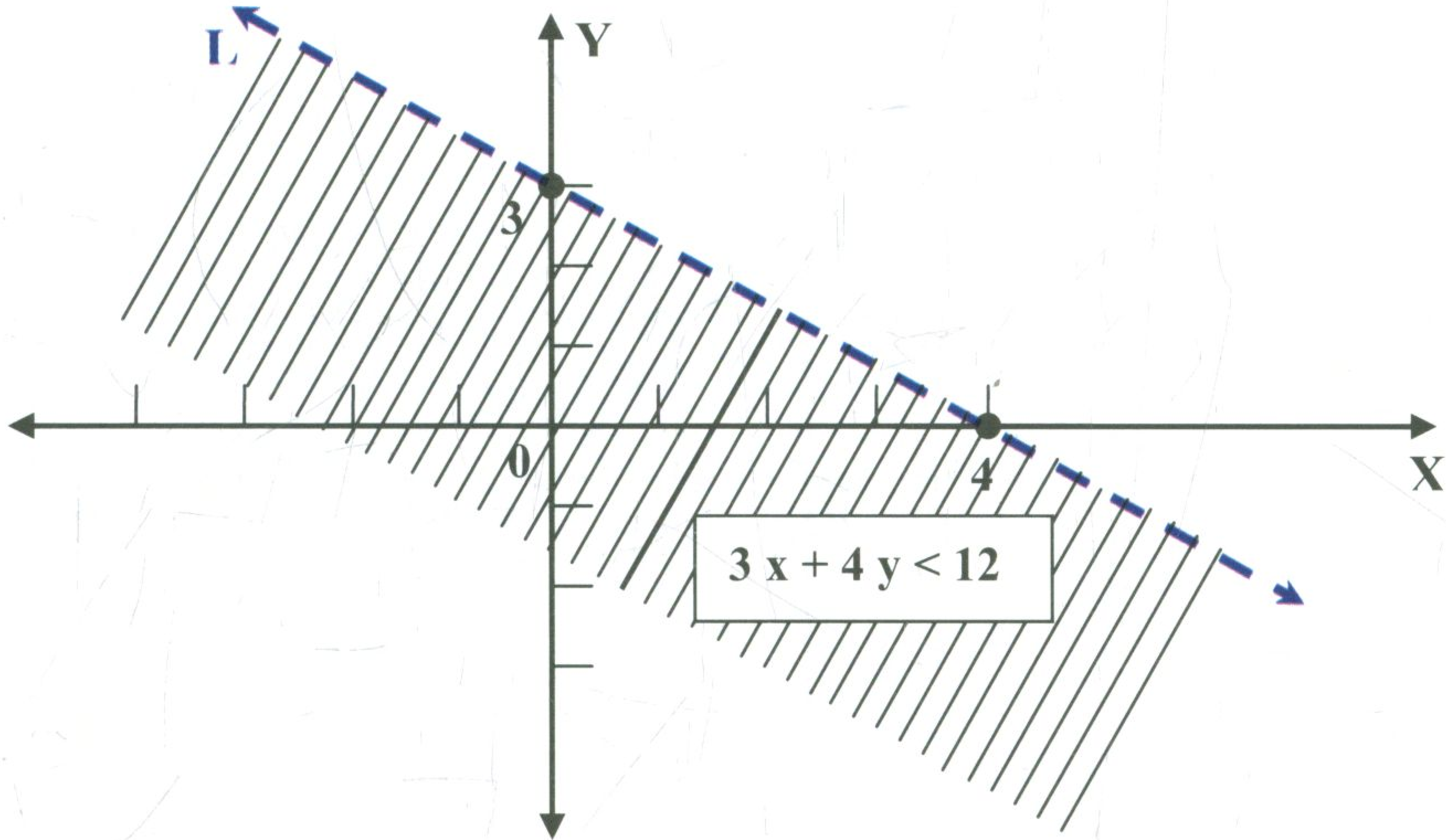
لإيجاد مجموعة حل المتباينة المذكورة، نرسم الخط المستقيم:

$$3x+4y=12$$

بيانياً بشكل متقطع وذلك لوجود علامة <. نوجد ثلاث أزواج مرتبـة تحقـق هـذه المعادلة كما في الجدول التالي:

x	0	4	1
y	3	0	2.25

يمكن رسم الخط المستقيم بالطرق التي اتبعناها كما في الشكل التالي:



بالتعويض عن النقطة $(0 , 0)$، نجد أن المتباينة تتحقق، وبالتالي فإن مجموعة الحل (منطقة الحل) هي الجانب الأدنى المظلل من الخط المستقيم L ليس فيها نقاط الخط المستقيم كما يوضحها الشكل السابق.

مثال (١١): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$12\,x - 3\,y \geq -9$$

الحل متروك للقارئ.

ثانياً: متباينات الدرجة الثانية Second Order Inequalities

في هذا الجزء من الفصل نتعامل مع متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد فقط. ومتباينات الدرجة الثانية هي تعبير جبري يأخذ إحدى الصور:

$$ax^2+bx+c\ge 0 \quad or \quad ax^2+bx+c>0 \quad , \quad a,b,c\in R \ , \ a\ne 0$$

$$or \quad ax^2+bx+c\le 0 \quad or \quad ax^2+bx+c<0$$

هناك عدة طرق لإيجاد الحل العام لمتباينات الدرجة الثانية سنذكر بعضها في سياق الأمثلة التالية.

مثال (١٢): أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2-4<0$

الحل

الطريقة الأولى: استخدام خواص القيمة المطلقة

حيث إن المتباينة المذكورة هي حدين فقط، نجد أن:

$$x^2-4<0 \ \Rightarrow \ x^2<4$$

من خواص القيمة المطلقة المذكورة في الفصل الرابع نحصل على:

$$x^2<4 \ \Rightarrow \ |x|<2 \ \leftrightarrow -2<x<2$$

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي فترة الأعداد الحقيقية $(-2\ ,\ 2)$.

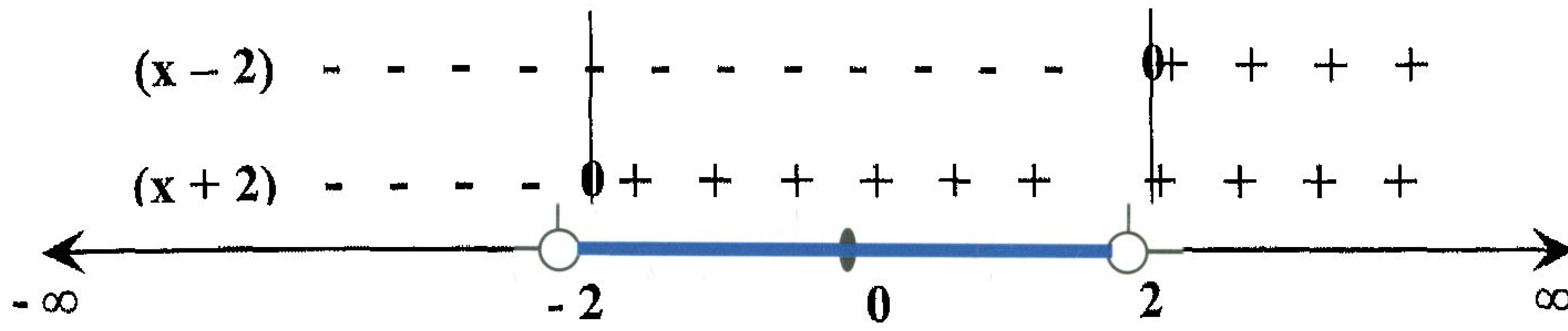
الطريقة الثانية: طريقة التحليل

في هذه الحالة نستخدم طريق تحليل الفرق بين مربعين المذكورة في الفصل الرابع بعد وضع المتباينة على صورة معادلة صفرية، ثم إيجاد جذورها، بعد ذلك نستخدم طريقة إشارة حدود المعادلة على خط الأعداد الحقيقية كالآتي:

$$x^2-4=0 \ \Rightarrow \ (x-2)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \ x-2=0 \quad or \quad x+2=0$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة هما $\{-2\ ,\ 2\}$. نرسم خط الأعداد الحقيقية ونوضح عليه جذري المعادلة اللذين بدورهما يقسمان الخط إلى ثلاثة أجزاء كما يلي:



وحيث إن المتباينة سالبة، فإن حاصل ضرب الحدين $(x-2)$، $(x+2)$ يجب أن يكون سالباً، أي أن إشارة أحد الحدين تختلف عن إشارة الحد الآخر. ومن ثم فإن الحل يقع داخل الفترة المفتوحة $(-2\,,\,2)$.

مثال (١٣): أوجد مجموعة حل المتباينة:

$$x^2-3x-2<10-2x$$

الحل متروك للقارئ.

مثال (١٤): أوجد مجموعة حل المتباينة:

$$6x^2-x-1>-2x+1$$

الحل

باستخدام خواص المتباينات نجد أن:

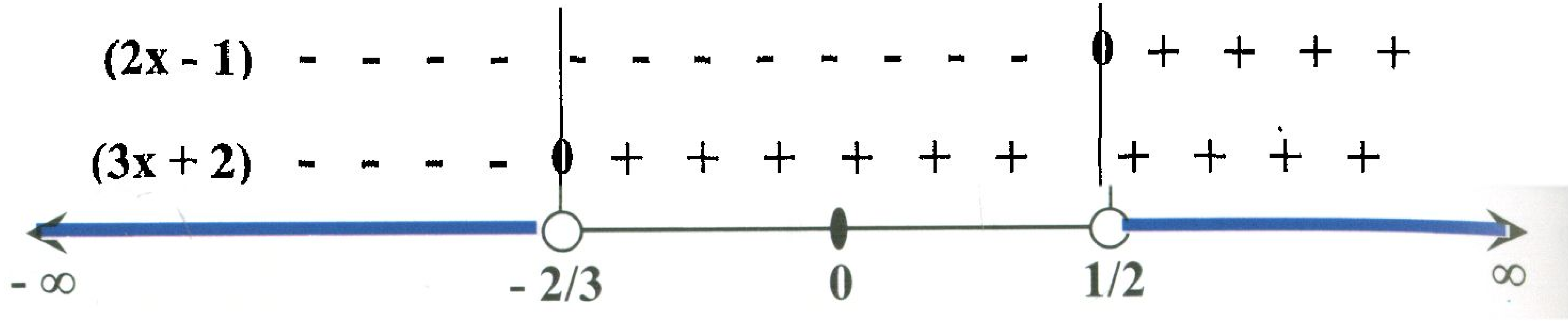
$$6x^2+x-2>0$$

بعد وضع المتباينة على صورة معادلة خط مستقيم، نستخدم طريق التحليل المذكورة في الفصل الرابع، ثم نوجد جذورها، بعد ذلك نستخدم طريقة إشارة حدود المعادلة على خط الأعداد الحقيقية كالآتي:

$$6x^2+x-2=0 \;\;\Rightarrow\;\; (2x-1)(3x+2)=0$$

$$\Rightarrow\;\; 2x-1=0 \;\;\; or \;\;\; 3x+2=0$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة هما $\left\{-\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{2}\right\}$. نرسم خط الأعداد الحقيقية ونوضح عليه جذري المعادلة اللذين بدورهما يقسمان الخط إلى ثلاثة أجزاء كما يلي:



وحيث أن المتباينة موجبة، فإن حاصل ضرب الحدين $(3x+2)$، $(2x-1)$ يجب أن يكون موجباً، أي أن الحدين يجب أن يكونا متشابهين في الإشارة. ومن ثم فإن الحل يقع داخل الفترة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\cup\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$.

مثال (١٥): أوجد مجموعة حل المتباينة:

$$\frac{3x+4}{x+1}\le 2$$

الحل

لحل هذه المتباينة الكسرية، يجب المرور بالخطوات التالية:

١ – جعل الطرف الأيمن من المتباينة مساوياً للصفر، ثم توحيد المقامات لنحصل على:

$$\frac{3x+4}{x+1}-2\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3x+4-2(x+1)}{x+1}\le 0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3x+4-2x-2}{x+1}\le 0$$

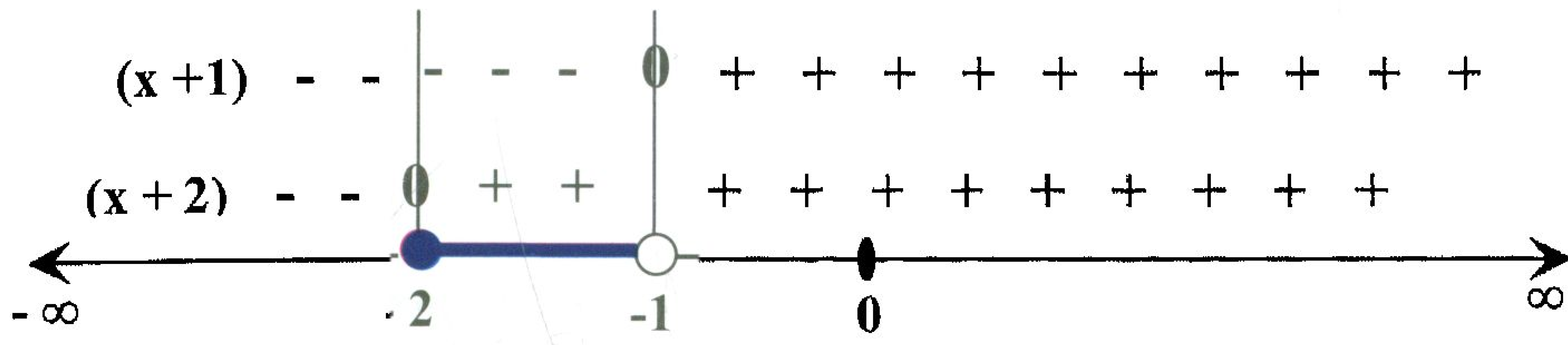
$$\Rightarrow\quad \frac{x+2}{x+1}\le 0$$

٢ – نوجد أصفار البسط والمقام كلّ على حدة لنحصل على جذورهما كالآتي:

$$x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$

$$and \quad x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$

٣ – نستخدم طريقة إشارة البسط والمقام كلّ على حدة كالآتي:



وحيث إن المتباينـــة ســـالبة، فإن خارج قسمة الحدين $(x+2)$، $(x+1)$ يجب أن يكون سالباً، أي أن الحدين يجب أن يكونا مختلفين في الإشارة. ومن ثم فإن الحل يقع داخل الفترة $[-2\ ,-1)$ مع استثناء أن يكون المقام مســـاوياً للصفر. أي أنه لا يمكن أن يكون $x=-1$ (أي أن $x\neq -1$) لكي لا يكون الكسر كمية غير معرفة.

مثال (١٥): أوجد مجموعة حل المتباينة:

$$\frac{3x+1}{x-2}\geq 4$$

الحل متروك للقارئ.

تمارين

١ – مستخدماً خواص المتباينات، أوجد الحل العام للمتباينات الآتية:

$1)\ \frac{2x-1}{3}+1>\frac{x+1}{2}$

$2)\ \frac{3x-2}{2}-1<\frac{2x-1}{4}$

$3)\ 4x-3<0$

$4)\ 2x+5\geq 0$

$5)\ 2x-3\leq 5$

$6)\ 4-2x\leq 6$

$7)\ \frac{3x+2}{-2}>-1$

$8)\ 2<2x-3<3$

$9)\ 3<7-2x<13$

$10)\ \frac{3+x}{5}>2x$

$11)\ x+8\geq 3x-2>x+2$

$12)\ 2x-1<x+3<3x+7$

$13)\ 3(x+2)<6x+12$

$14)\ -4(x-5)\geq 2x+15$

$15)\ 2x<10 \ \vee\ x+1>9$

$16)\ x+3>3 \ \wedge\ 2x+1>15$

$17)\ 12<x+5<19$

$18)\ 2x+5>-16 \ \wedge\ 2x+5<9$

$19)\ 4\leq 10x+1\leq 51$

$20)\ -4x+5>9 \ \vee 4x+1<5$

٢ – باستخدام خواص القيمة المطلقة، أوجد الحل العام للمتباينات الآتية:

$1)\ |x-1|<2$

$2)\ |x-3|>1$

$3)\ |2x-5|<1$

$4)\ |-2x+13|<4$

$5)\ |2x-1|>3$

$6)\ |-2x+13|<4$

$7)\ |2x-3|\leq 4$

$8)\ |x+2|>3$

$9)\ |2x-1|>4$

$10)\ |x+3|\geq 5$

$11)\ |2x+7|\leq 0$

$12)\ |x-5|\geq 0$

$13)\ |x-7|\geq 0$

$12)\ |x-4|\leq 0$

٢ – استخدم التمثيل البياني لإيجاد الحل العام للمتباينات الآتية:

$1)\ x+y<3$

$2)\ 2x+3y<2$

$3)\ 2x+5y+6>0$

$4)\ 2x-y\geq 4$

$5)\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}<1$

$6)\ \frac{2}{3}x-\frac{y}{2}\leq 1$

7) $y \leq 2x$

8) $y > 2x + 3$

9) $x \geq 2y - 4$

10) $x(x+2) + 3 \geq x(x+1) + 3y$

٣ – أوجد مجموعة الحل العام للمتباينات الآتية:

1) $-2x^2 - 5x + 3 > 0$

2) $x^2 > -2x + 8$

3) $x^2 + 7x > 0$

4) $x^2 - 5x \leq 0$

5) $x^2 - 16 \leq 0$

6) $x^2 - 49 > 0$

7) $x^2 + 7x + 10 < 0$

8) $x^2 + 5x + 6 < 0$

9) $x^2 - 3x \geq 28$

10) $x^2 < -x + 30$

11) $2x^2 - x \leq 1$

12) $2x^2 \geq x + 6$

13) $\frac{x+4}{x-1} < 0$

14) $\frac{x-2}{x+3} > 0$

15) $\frac{x-5}{x+8} \geq 3$

16) $\frac{x-4}{x+6} \leq 1$

$17)\ \dfrac{x}{2x+7} \geq 4$

$18)\ \dfrac{x}{3x-5} \leq -5$

٤ – تُؤَجِر شركة الطائف لزبائنها السيارة مقابل *90* ريالاً يومياً، يُضاف إليها *25* هللة لكل كيلو متر زائد عن الحد اليومي. كما تُؤَجِر شركة جدة لزبائنها السيارة مقابل *120* ريالاً يومياً، مُضافاً إليها *20* هللة لكل كيلومتر زائد عن الحد اليومي. أوجد عدد الكيلومترات التي تُمَكِّن الزبون من استئجار سيارة بسعر أرخص من شركة جدة لمدة يوم واحد.

الفصل السادس

العلاقات والدوال

THE RELATIONS AND THE FUNCTIONS

مقدمة Introduction

في مراحل التعليم العام تعرفنا بصورة مختصرة على ما يسمى بالعلاقات، وفي هذا الفصل سنحاول دراستها تفصيلياً مع إلقاء الضوء على حالة خاصة منها ذات أهمية علمية للبناء الرياضي في علم الرياضيات تسمى الدوال (الرواسم – التطبيقات).

أول من قَدَّم مفهوم الدالة عام 1694 ميلادية العالم الرياضي المشهور ليبنز Leibntiz (1646 - 1716). ثم طَوَّر هذا المفهوم عام 1718 ميلادية العالم السويسري يوهان برنوللي Johan Bernoulli (1667 – 1748). وفي عام 1734 ميلادية عَرَّف العالم السويسري أويلر Euler (1707 – 1783) الدالة بمفهومها الحالي التي سنتعرض لتعريفها لاحقاً. وللدخول في طيات هذا الفصل سنلجأ إلى تلخيص سريع لبعض المفاهيم والتعريفات الأساسية وخاصةً مفهوم العلاقة كرابط بين المجموعات بعضها البعض.

أولاً: الأزواج المرتبة Ordered Pairs

تعريف الزوج المرتب مر بمحـــاولات عديـــدة وجادة، ففي أوائل القرن الماضي عـــام 1914 م قدم العالم الرياضي نوربرت واينـــر Norbert Wiener أول تعريـــف للزوج المرتب على أنه المجموعة $\{\{a\},\{a,b\}\}$. أمّا في عـــــام 1921 م عَـــرَّف كـــازيميروس كوراتوفيسكي Kazimierz Kuratowski الـــزوج المرتـــب الأكثـــر استخداماً في الوقت الراهن والذي يعرف كالآتي:

الزوج المرتب هو تعبير بالصورة $(a\ ,\ b)$، يسمى a بالإحداثي الأول (المُرَكّبة الأولى – العنصر الأول- الحد الأول – المسقط الأول)، b هـــو الإحـــداثي الثـــاني (المُرَكّبة الثانية – العنصر الثاني – الحد الثاني – المسقط الثاني). ويكون الترتيب هنا مقصوداً بكل دقة. فمثلاً الزوج المرتب $(1\ ,\ 4)\neq(4,1)$.

يقال للزوجين المرتبين $(a\ ,\ b),(c\ ,\ d)$ أنهما متساويان إذا وفقـــط إذا كـــان $a=c\ ,\ b=d$. أي أن:

$$(a\ ,\ b)=(c\ ,\ d)\ \leftrightarrow\ a=c\wedge b=d$$

أي يتساوى الزوجان المرتبان إذا تساوى العنصر الأول في كل منهما، ويتساوى أيضاً العنصر الثاني في كل منهما.

ثانياً: الضرب الديكارتي Cartesian Product

يُعرف حاصل الضرب الديكارتي (جداء ديكارت – حاصل الضرب الكارتيزي) بين المجموعتين B , A، والذي يرمز له بالرمز $A\times B$ أو $B\times A$ كالآتي:

$$A\times B=\{(a\,,b):a\in A\ \wedge\ b\in B\}$$
$$and\ \ B\times A=\{(b\,,a):b\in B\ \wedge\ a\in A\}$$

ويعرف حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$ بالضرب الخيَّامي، نسبة إلى العالم المسلم أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام (1131 – 1044).

على وجه العموم نلاحظ أن:

$$A\times B\neq B\times A$$
$$\text{and}\ \ A\times B=B\times A\leftrightarrow A=B\neq\Phi$$

يمكن التعبير عن مفهوم حاصل الضرب الديكارتي باستخدام جدول الانتماء الآتي:

A	B	$A\times B$	$B\times A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

أي أن حالة الانتماء الوحيدة لحاصل الضرب الديكارتي $A\times B$, $B\times A$ هي أن ينتمي العنصران إلى كل من A , B.

مثال (١): إذا كانت $A=\{1\,,2\,,3\}$, $B=\{a\,,b\}$ مجموعتان:

١ – أوجد $A\times B$ ، $B\times A$ ، $A\times A$ ، $B\times B$.

٢ – أوجد ثلاث مجموعات جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$.

الحل

١ – من تعريف حاصل الضرب الديكارتي، نجد أن:

$$A\times B=\{(1\,,a)\,,(1\,,b)\,,(2\,,a)\,,(2\,,b)\,,(3\,,a)\,,(3\,,b)\},$$

$B\times A=\{(a\ ,1),(a\ ,2),(a\ ,3),(b\ ,1),(b\ ,2),(b\ ,3)\},$

$B\times B=B^2=\{(a\ ,a),(a\ ,b),(b\ ,a),(b\ ,b)\}$

$A\times A=A^2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

٢ – نفرض أن X, Y, Z ثلاث مجموعات جزئية من $A\times B$ كالآتي:

$X=\{(1\ ,a),(1\ ,b)\},$

$Y=\{(2\ ,a),(2\ ,b),(3\ ,a)\}$

$Z=\{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b)\}$

٢/١– طرق تمثيل حاصل الضرب الديكارتي

لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$ بين المجموعتين A , B توجد عدة طرق هي:

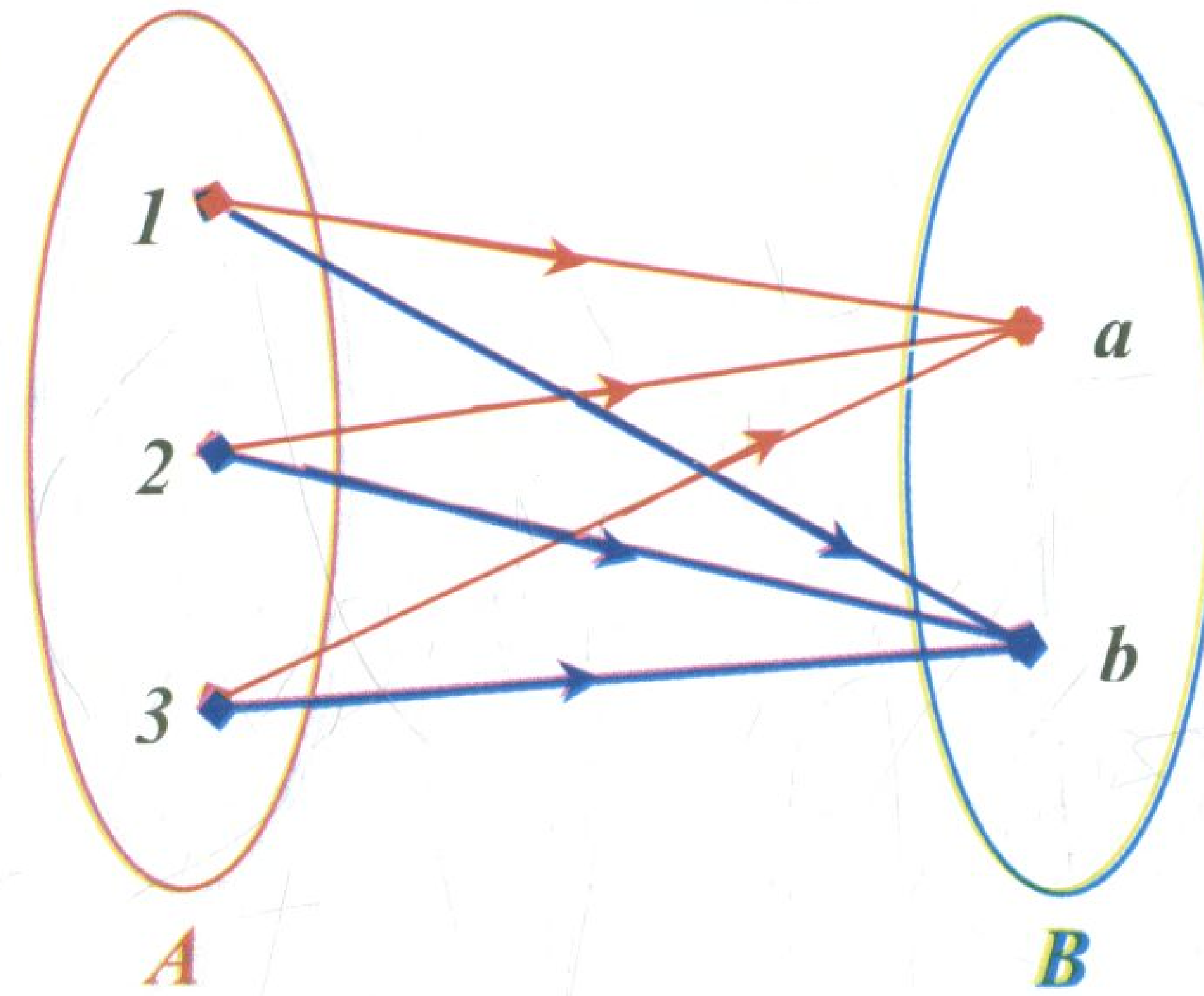
٢/١/١– التمثيل الجدولي

يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$ ، وذلك بوضع عناصر المجموعة A في العمود الأول من الجدول، ووضع عناصر المجموعة B في الصف الأعلى من الجدول، ووضع عناصر $A\times B$ في بقية خلايا الجدول. ويمكن تمثيل بيانات مثال (١) جدولياً كالآتي:

A \ B	a	b
1	(1 , a)	(1 , b)
2	(2 , a)	(2 , b)
3	(3 , a)	(3 , b)

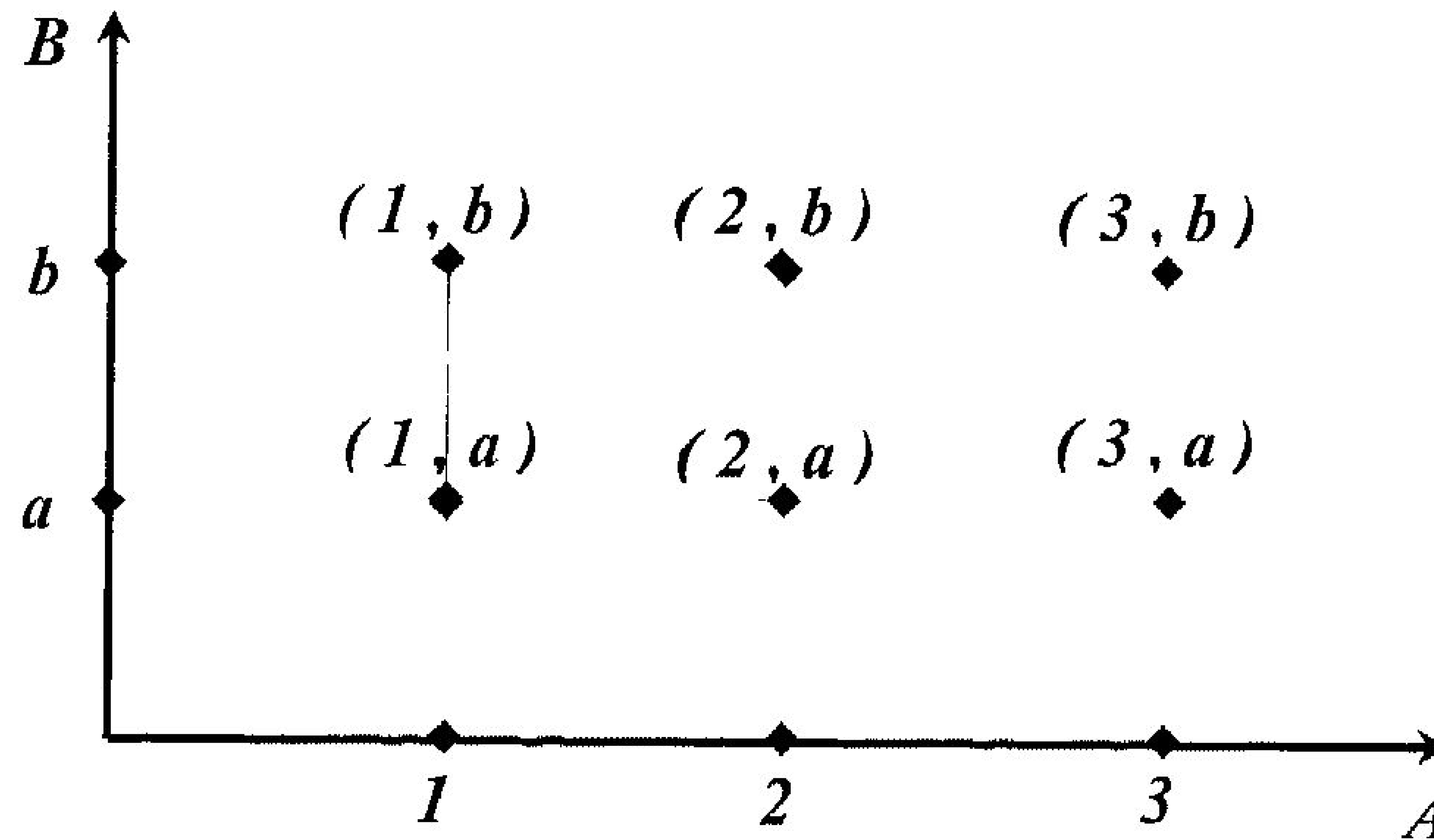
٢/١/٢– التمثيل السهمي

حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$ يمكن تمثيله سهمياً، وذلك برسم مخطط فن لكل من المجموعتين B , A، ثم نرسم أسهما من عناصر A في اتجاه عناصر B. ويمكن تمثيل بيانات مثال (١) باستخدام المخطط السهمي كالآتي:



٢/١/٣- التمثيل البياني (الشبكة البيانية)

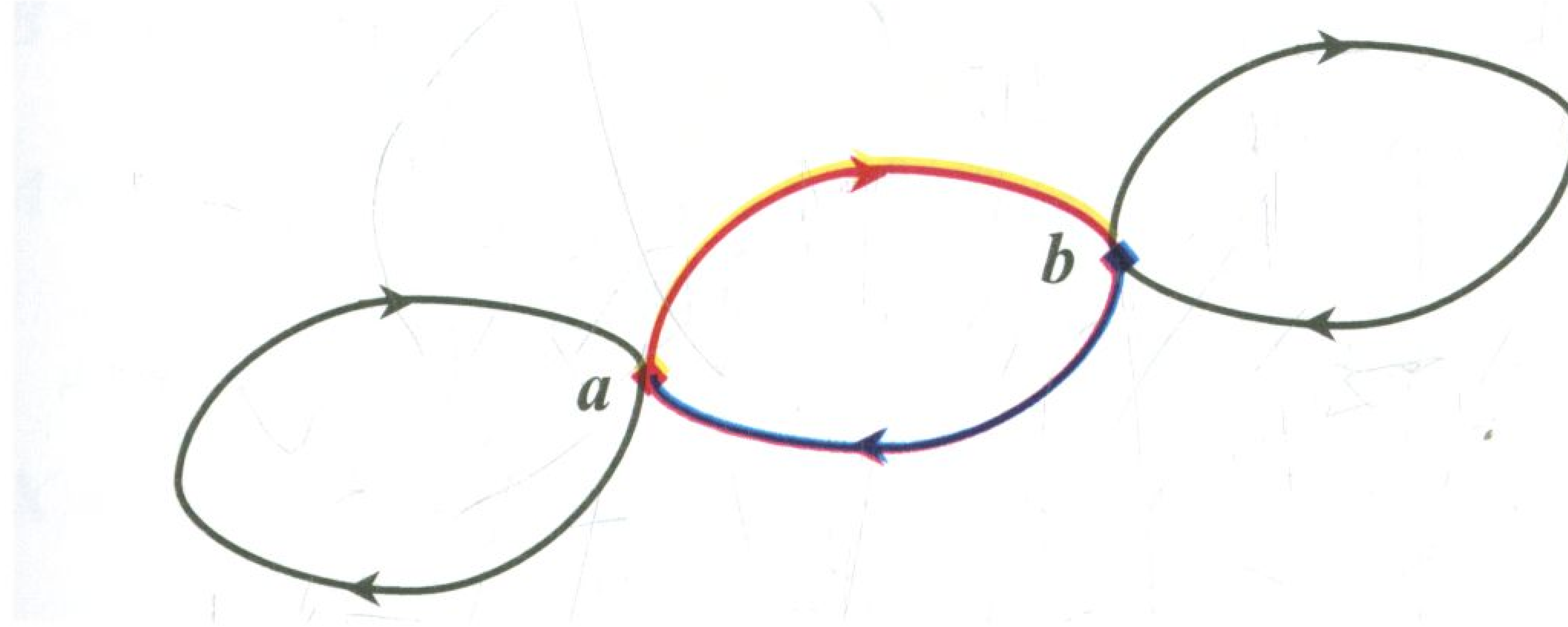
في هذه الحالة نمثل حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ بمجموعة نقاط في مستوى الإحداثيات، وذلك برسم محورين متعامدين، ونأخذ على المحور الأفقي (السيني) عناصر المجموعة A، وعلى المحور الرأسي (الصادي) عناصر المجموعة B، فتُمَثَّل عناصر حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ بنقاط تقاطع عناصر المجموعة A مع عناصر المجموعة B. وبالتالي فإن عناصر حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ هو الأزواج المرتبة في مستوى الإحداثيات $R \times R = R^2$. ويمكن تمثيل بيانات مثال (١) باستخدام التمثيل البياني كالآتي:



٢/١/٤- التمثيل الموجه (الرسم الموجه)

تعتمد هذه الطريقة على حاصل الضرب بين المجموعة ونفسها $A \times A$، ولا تعتمد على حاصل الضرب بين مجموعتين مختلفتين. وتسمى الأسهم التي تربط بين العناصر بالأضلاع الموجهة Directed edges، كما يسمى كل سهم يربط بين العنصر

ونفسه بالعروة (العقدة) Loop. ويمكن تمثيل بيانات مثال (١) باستخدام الرسم الموجه كالآتي:



٢/٢- خواص حاصل الضرب الديكارتي

إذا كانت A , B , C , D أربع مجموعات، فإن حاصل الضرب الديكارتي يحقق الخواص التالية:

$$i)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$ii)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$iii)\ A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

$$iv)\ A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$$

$$v)\ A\times B=A\times C \quad \leftrightarrow \quad B=C$$

$$vi)\ A\times B=B\times A \quad \leftrightarrow \quad A=B\ ,\ A\neq\Phi\wedge B\neq\Phi$$

$$vii)\ if\quad E\subset A\wedge F\subset B \quad \rightarrow \quad E\times F\subset A\times B$$

$$viii)\ A\times B=\Phi \ \leftrightarrow\ A=\Phi\vee B=\Phi$$

$$ix)\ |A|=m\ ,\ |B|=n \Rightarrow |A\times B|=mn$$

$$x)\ (A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

$$xi)\ (A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cap B)\times(C\cap D)$$

إثبات صحة هذه الخواص متروك للقارئ.

ثالثاً: العلاقات الثنائية Binary Relations

العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B والتي يرمز لهـا بـالرمز R تعرف على أنها مجموعة جزئية من حاصـل الـضرب الـديكارتي $A\times B$. أي أن $R\subset A\times B$. ويمكـن التعبيـر عنهـا بالـصورة $R: A\to B$. وإذا كانـت $R=A\times B$، فإن العلاقة في هذه الحالة تسمى علاقة تامة Complete relation.

تسمى كل علاقة من المجموعة A إلى نفسها علاقة في A (علاقة على A). أي أن $R\subset A\times A$ وتكتب $R: A\to A$.

مثال (٢): إذا كانت $A=\{1\ ,\ 2\}\ \ ,\ \ B=\{a\ ,\ b\}$ مجموعتان فإن:

$$A\times B=\{(1\ ,\ a)\ ,(1\ ,\ b)\ ,(2\ ,\ a)\ ,(2\ ,\ b)\}\ \ ,$$

$$R=\{(1\ ,\ a)\ ,(2\ ,\ b)\}$$

نلاحظ أن $R\subset A\times B$، وبالتالي فإن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B.

ملاحظات

١ – إذا كان $(x\ ,\ y)\in R$، نعبر عن ذلـك xRy، أمـا إذا كـان $(x\ ,\ y)\notin R$، فتكتب $x\not R y$.

٢ – المجموعة الخالية Φ هي مجموعـة جزئيـة مـن كـل المجموعـات. أي أن $\Phi\subset A\times B$. وعلى ذلك فإن Φ علاقة من المجموعة A إلـى المجموعـة B. وتسمى العلاقة الخالية.

٣ – يمكن تمثيل العلاقة R بنفس طرق تمثيل حاصل الضرب الديكارتي.

٤ – يمكن التعبير عن العلاقة بطريقة الخاصية المميزة. كمل يوضحها المثال التالي:

مثال (٣): إذا كانت $B=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}\ \ ,\ \ A=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ مجموعتان، وكانت العلاقات التالية معرفة بطريقة الخاصية المميزة:

$$i)\ R_1=\{(x\ ,\ y): x=y\ \ ,\ \ x\in A\wedge y\in B\}$$

$$ii)\ R_2=\{(x\ ,\ y): x=2y\ \ ,\ \ x\in A\wedge y\in B\}$$

$iii)\ R_3 = \{(x\ ,\ y) : x > y\ ,\ x \in A \wedge y \in B\}$

$iv)\ R_4 = \{(x\ ,\ y) : x \leq y\ ,\ x \in A \wedge y \in B\}$

$v)\ R_5 = \{(x\ ,\ y) : x / y$ (x تقبل القسمة على y) $,\ x \in A \wedge y \in B\}$

يمكن التعبير عن العلاقات السابقة بطريقة القائمة كالآتي:

$i)\ R_1 = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (2\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 3)\}$

$ii)\ R_2 = \{(2\ ,\ 1)\ ,\ (4\ ,\ 2)\}$

$iii)\ R_3 = \{(2\ ,\ 1)\ ,\ (3\ ,\ 1)\ ,\ (3\ ,\ 2)\ ,\ (4\ ,\ 1)\ ,\ (4\ ,\ 2)\ ,\ (4\ ,\ 3)\}$

$iv)\ R_4 = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 3)\ ,\ (2\ ,\ 2)\ ,\ (2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 3)\}$

$v)\ R_5 = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 3)\ ,\ (2\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 3)\}$

٣/١ – مجال العلاقة Domain of Relation

يعرف مجال العلاقة (نطاق العلاقة) R من المجموعة A إلى المجموعة B $(R : A \rightarrow B)$، على أنه هو المجموعة A نفسها.

٣/٢ – المجال المصاحب للعلاقة Co domain of Relation

يعرف المجال المصاحب للعلاقة R (المجال المقابل – النطاق المقابل) من المجموعة A إلى المجموعة B $(R : A \rightarrow B)$، على أنه هو المجموعة B نفسها.

٣/٣ – مجال تعريف العلاقة Domain of Definition of Relation

يعرف مجال تعريف العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B $(R : A \rightarrow B)$، على أنه هو مجموعة العناصر التي تظهر كمركبة أولى في العلاقة ويرمز له بالرمز d_R. أي أن:

$$d_R = \{x \in A : (x\ ,\ y) \in R\ ,\ y \in B\}$$

مثال (٤): مجال تعريف العلاقات الواردة في مثال (٣) يمكن كتابته كالآتي:

$i)\ d_{R_1} = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\} \subset A$

$ii)\ d_{R_2} = \{2 , 4\} \subset A$

$iii)\ d_{R_3} = \{2 , 3 , 4\} \subset A$

$iv)\ d_{R_4} = \{1 , 2 , 3\} \subset A$

$v)\ d_{R_5} = \{1 , 2 , 3\} \subset A$

٣/٤- مدى العلاقة Range of Relation

يعرف مدى العلاقة R من المجموعة A إلـــى المجموعـــة B ($R : A \rightarrow B$)، على أنه هو مجموعة العناصر التي تظهر كمركبة ثانية في العلاقة ويرمز له بالرمز r_R، ويسمي أيضاً صورة العلاقة R ($Image\ of\ Relation = Im\ (R)$). أي أن:

$$r_R = \{\, y \in B : (x , y) \in R\ ,\ x \in A \}$$

مثال (٥): مدى العلاقات الواردة في مثال (٣) يمكن كتابته كالآتي:

$i)\ r_{R_1} = \{1 , 2 , 3\} = B$

$ii)\ r_{R_2} = \{1 , 2\} \subset B$

$iii)\ r_{R_3} = \{1 , 2 , 3\} = B$

$iv)\ r_{R_4} = \{1 , 2 , 3\} = B$

$v)\ r_{R_5} = \{1 , 2 , 3\} = B$

٣/٥- العلاقة العكسية The Inverse Relation

إذا كانت R هي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B، فإن العلاقة العكسية لهذه العلاقة والتي يرمز لها بالرمز R^{-1} تعرف من المجموعة B إلى المجموعة A كالآتي:

$$R^{-1} = \{(y , x) : (x , y) \in R\ ,\ x \in A\ , y \in B\}$$

مثال (٦): يمكن التعبير عن العلاقات العكسية للعلاقات الواردة في مثال (٣) كالآتي:

$i)\ R_1^{-1} = \{(1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3)\}$

$ii)\ R_2^{-1} = \{(1\ ,\ 2)\ ,\ (2\ ,\ 4)\}$

$iii)\ R_3^{-1} = \{(1\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 3)\ ,\ (2\ ,\ 3)\ ,\ (1\ ,\ 4)\ ,\ (2\ ,\ 4)\ ,\ (3\ ,\ 4)\}$

$iv)\ R_4^{-1} = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (2\ ,\ 1)\ ,\ (3\ ,\ 1)\ ,\ (2\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 3)\}$

$v)\ R_5^{-1} = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (2\ ,\ 1)\ ,\ (3\ ,\ 1)\ ,\ (2\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 3)\}$

ملاحظة

من تعريف العلاقة R والعلاقة العكسية لها R^{-1} نجد أن:

$i)\ range\left(R^{-1}\right) = domain(R)$

$ii)\ domain\left(R^{-1}\right) = range(R)$

$iii)\ \left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

٣/٦- علاقة الوحدة Identity Relation

تعرف علاقة الوحدة على أي مجموعة A والتي يرمز لها بالرمز I_A، على أنها مجموعة الأزواج المرتبة في $A \times A$ التي يتساوى فيها الإحداثي الأول مع الإحداثي الثاني، كما تسمى أيضاً بالعلاقة القطرية (Diagonal relation). أي أن:

$$I_A = \{(x\ ,\ x):\ x \in A\}$$

مثال (٧): إذا كانت $A = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\}$ مجموعة، وكانت R علاقة معرفة في A بطريقة الخاصية المميزة كالآتي:

$$R = \{(x\ ,\ y):\ x \geq y\ \ ,\ \ x\ ,\ y \in A\}$$

ويمكن كتابتها بطريقة القائمة كالآتي:

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),$$
$$(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$$

وبالتالي فإن علاقة الوحدة على المجموعة A هي:

$$I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

ومن ثم فإن:

$d_R = \{1, 2, 3, 4, 5\} = r_R = A$

٣/٧- علاقة التكافؤ Equivalence Relation

علاقة التكافؤ تحقق شروط ثلاثة سنذكرها تفصيلياً كما يلي:

٣/٧/١- العلاقة العاكسة Reflexive Relation

يقال عن العلاقة R في المجموعة A أنها عاكسة إذا تحقق الشرط التالي:

$\forall\ x \in A \rightarrow (x, x) \in R$

مثال (٨)

أ - إذا كانت R_1 علاقة في المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ معرفة كالآتي:

$R_1 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

فإن R_1 ليست علاقة عاكسة، وذلك لأن $2 \in A \rightarrow (2, 2) \notin R_1$.

ب - إذا كانت R_2 علاقة في المجموعة $A = \{a, b, c\}$ معرفة كالآتي:

$R_2 = \{(a, b), (a, a), (c, c), (b, a), (b, b)\}$

فإن R_2 تكون علاقة عاكسة في المجموعة A.

٣/٧/٢- العلاقة المتماثلة Symmetric Relation

يقال عن العلاقة R في المجموعة A أنها متماثلة إذا تحقق الشرط التالي:

$if\ (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R \quad , \quad \forall\ x, y \in A$

مثال (٩): من بيانات مثال (٨) نجد أن R_1 علاقة ليست متماثلة، بينما R_2 علاقة متماثلة.

٣/٧/٣- العلاقة الناقلة Transitive Relation

يقال عن العلاقة R في المجموعة A أنها ناقلة (متعدية) إذا تحقق الشرط التالي:

$if\ (x, y) \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R \quad , \quad \forall\ x, y, z \in A$

مثال (١٠): إذا كانت R علاقة في المجموعة $A = \{1, 3, 5, 7\}$ معرفة كالآتي:

$R = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5), (5, 3), (5, 5), (3, 5)\}$

فإن R تكون علاقة ناقلة في المجموعة A.

يقال إن العلاقة R في المجموعة A علاقة تكافؤ في المجموعة A، إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة:

١ – العلاقة R تكون عاكسة.

٢ – العلاقة R تكون متماثلة.

٣ – العلاقة R تكون ناقلة.

مثال (١١)

١ – علاقة التوازي على مجموعة المستقيمات في المستوى الإقليدي هي علاقة تكافؤ.

٢ – علاقة التعامد بين مستقيمات المستوى الإقليدي ليست علاقة تكافؤ.

٣ – علاقة يقسم على في مجموعة الأعداد الطبيعية N ليست علاقة تكافؤ.

٤ – علاقة التساوي في أي مجموعة هي علاقة تكافؤ.

٥ – علاقة الاحتواء في المجموعات ليست علاقة تكافؤ.

مثال (١٢): إذا كانت R علاقة في المجموعة $A=\{1 , 2 , 3\}$ معرفة كالآتي:

$$R=\{(1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3)\}$$

فإن R تكون علاقة تكافؤ في المجموعة A.

٣/٨– فصول التكافؤ Equivalence Classes

إذا كانت R علاقة تكافؤ في المجموعة A، وكان a أي عنصر اختياري من المجموعة A. فإن فصل التكافؤ للعنصر a والذي يرمز له بالرمز $[a]$ $([a]\neq \Phi)$ هو كل العناصر المرتبطة مع العنصر a بعلاقة. أي أن:

$$[a]=\{x: (a , x)\in R \ , \ x\in A\}$$

مثال (١٣): إذا كانت R علاقة في المجموعة $A=\{a , b , c , d , e\}$ معرفة كالآتي:

$$R=\{(a ,a),(a ,b),(c ,e),(b ,a),(b ,b),(e ,c),(c ,c),(e ,e),(d ,d)\}$$

نلاحظ أن العلاقة R هي علاقة تكافؤ عل المجموعة A. وبالتالي فإن فصول التكافؤ لعناصر المجموعة A هي:

$$[a]=\{a , b\}\subset A$$

$$[b]=\{a\ ,b\}=[a]\subset A$$

$$[c]=\{c\ ,e\}\subset A$$

$$[d]=\{d\}\subset A$$

$$[e]=\{e\ ,c\}=[c]\subset A$$

رابعاً: الدوال The Functions

في الجزء السابق من هذا الفصل لاحظنا أن العلاقة هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين دون إضافة أي قيد أو شرط أو دون الالتزام بأية خاصية معينة، هي فقط مجرد مجموعة جزئية.

سندرس هنا في هذا البند نوعاً آخر من العلاقات له أهمية خاصة يسمى الدالة (التطبيق Mapping – الراسم – التحويل Transformation)، ويعتبر مفهوم الدالة من أكثر المفاهيم شيوعاً وأهمية في علم الرياضيات وأيضاً في جميع العلوم الأساسية والعسكرية العملية منها والتطبيقية، وهو ليس مفهوماً جديداً لأي دارس، حيث تناوله بالدراسة في أي مرحلة من مراحل التعليم السابقة، حينما كان المطلوب رسم العلاقة $x \in R$, $y = x^2$. فهذا يعني ببساطة شديدة دراسة علاقة خاصة تأخذ كل عنصر (عدد حقيقي) إلى مربعه. مثل هذه العلاقة تسمى دالة (تطبيقاً – راسماً).

اعتدنا على كتابة العلاقة $y = x^2$ على الصورة $f(x) = x^2$ آخذين في الاعتبار أن f خاصية تأخذ العدد الحقيقي x تغيره بعض الشيء وتعطينا العدد $y = f(x)$. لقد تعودنا على اعتبار x متغيراً Variable ، واعتبار $y = f(x)$ دالة Function في x.

لتوضيح مفهوم الدالة دعنا نستعرض المثال التطبيقي التالي:

في إحدى كليات الجامعة نفترض وجود مجموعة من الطلاب A مُسَجَّلون في مجموعة من الشعب لمادة الرياضيات العامة ولتكن B، حيث أن:

$$A = \{a_1 , a_2 , a_3 , \cdots , a_n\}$$

كما أن:

$$B = \{b_1 , b_2 , b_3 , \cdots , b_m\}$$

سوف نستخدم الزوج المرتب (a_i , b_j) للتعبير عن أن الطالب a_i مسجل في الشعبة b_j . فإذا كان لدينا:

$$f = \{(a_1 , b_2) , (a_2 , b_2) , (a_3 , b_2) , \cdots , (a_{10} , b_1)\}$$

فإن $f \subset A \times B$.

نلاحظ في العلاقة f أن الطالب a_1 مُسَجَّل في الشعبة b_2 فقط ولا يمكن أن يُسَجِّل في شعبة أخرى في مادة الرياضيات العامة (أي أن العنصر a_1 يظهر فقط في الزوج المرتب (a_1 , b_2) ولا يظهر في الأزواج المرتبة الأخرى)، كما أن الطالب a_2 لا يمكن أن يُسَجِّل إلا في الشعبة b_2 (أي أن العنصر a_2 لا يمكن أن يظهر إلا في الزوج المرتب (a_2 , b_2)، . . . وهكذا. وبالتالي فإن العنصر الأول لا يظهر إلا مرة واحدة فقط بين الأزواج المرتبة المنتمية إلى f).

العلاقة f الموضحة سابقاً تسمى دالة (راسم – تطبيق) من المجموعة A إلى المجموعة B. أي أن الدالة تعرف على أنها علاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B، بحيث أنه لكل عنصر $a \in A$ يوجد عنصر محدد ووحيد $b \in B$. وهذه الدالة يمكن كتابتها على الصورة $f : A \to B$ أو $A \xrightarrow{f} B$. وأيضاً على الصورة $\forall a \in A \; , \; f(a)$، وتُقرأ f دالة في a. ويكون $f(a)$ عنصراً من عناصر B. ويسمى بصورة Image العنصر a في المجموعة B تحت تأثير الدالة f. كما أن العنصر a يسمى الصورة العكسية Preimage أو أصل العنصر b والتي يرمز لها بالرمز $b = f(a)$. وسوف نرمز للدالة بأحد الرموز f أو g أو h.

قاعدة الدالة f تُعْطَى كأزواج مرتبة يمكن توضيحها من خلال التمثيل السهمي، وهذه القاعدة هي الطريقة التي تُحَدِّد ارتباط عناصر المجموعة A بعناصر المجموعة B، والتي يجب أن يتوافر بها شرطان هما:

أ – **شرط الكلية:** وهو وجود كل عناصر المجموعة A في عناصر الدالة كإحداثي أول.

ب – **شرط الأوحدية:** وهو أن كل عنصر في المجموعة A لا يرتبط إلاَّ بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B.

مثال (١٤): إذا كانت $A = \{1 , 2 , 3\} , B = \{a , b , c , d\}$ مجموعتان. مستخدماً طريقة المخطط السهمي بيِّن أيٍّ من المجموعات التالية تمثل علاقة، وأيها تمثل دالة؟ مع ذكر السبب.

$i)\ f_1 = \{(1\ ,a),(2\ ,b),(3\ ,b)\}$

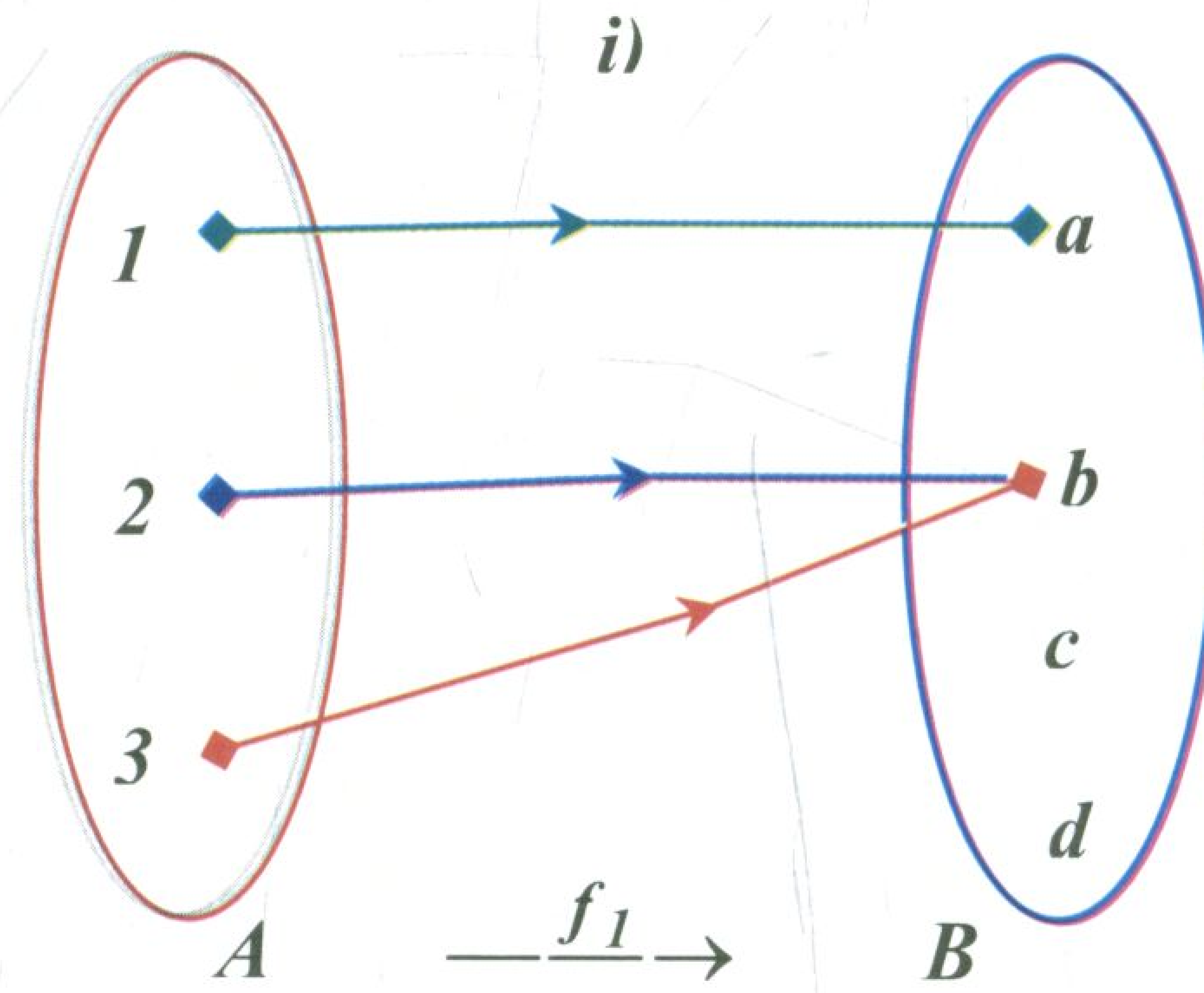
$ii)\ f_2 = \{(1\ ,b),(1\ ,c),(2\ ,a),(3\ ,d)\}$

$iii)\ f_3 = \{(1\ ,a),(2\ ,d)\}$

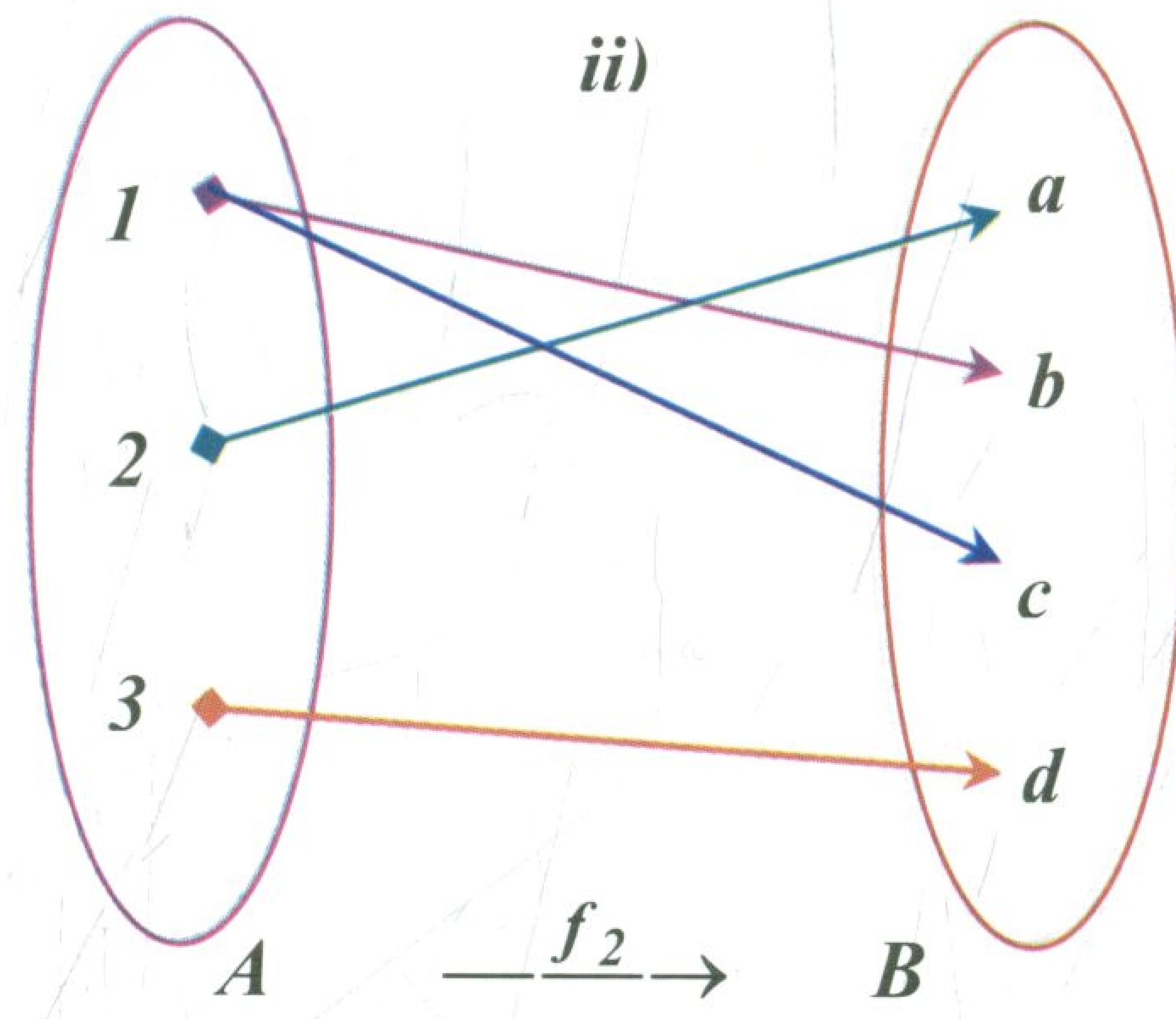
$iv)\ f_4 = \{(1\ ,a),(2\ ,a),(3\ ,a)\}$

الحل

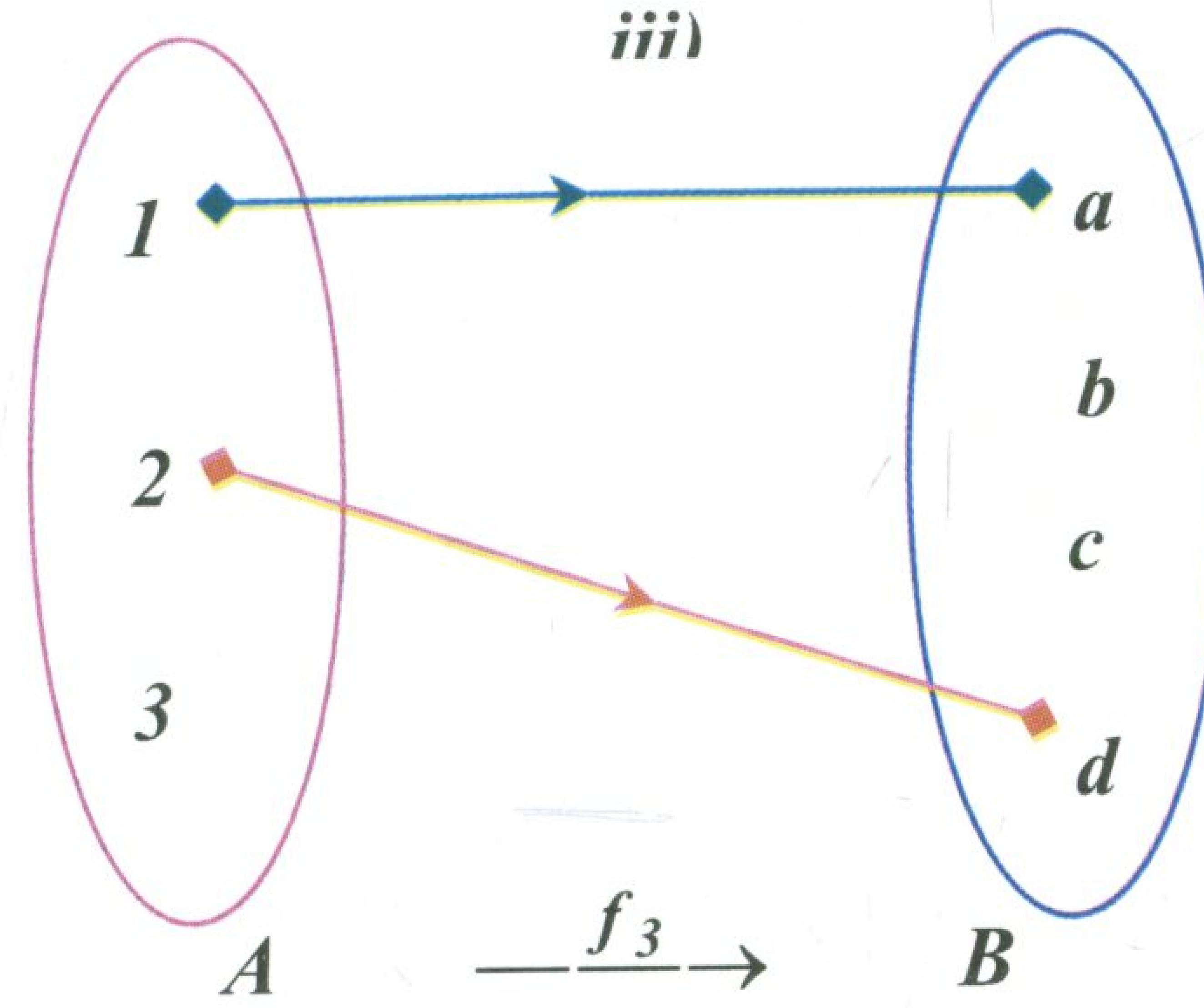
يمكن التعبير عن المجموعات الأربعة السابقة باستخدام طريقة المخططات السهمية كالآتي:



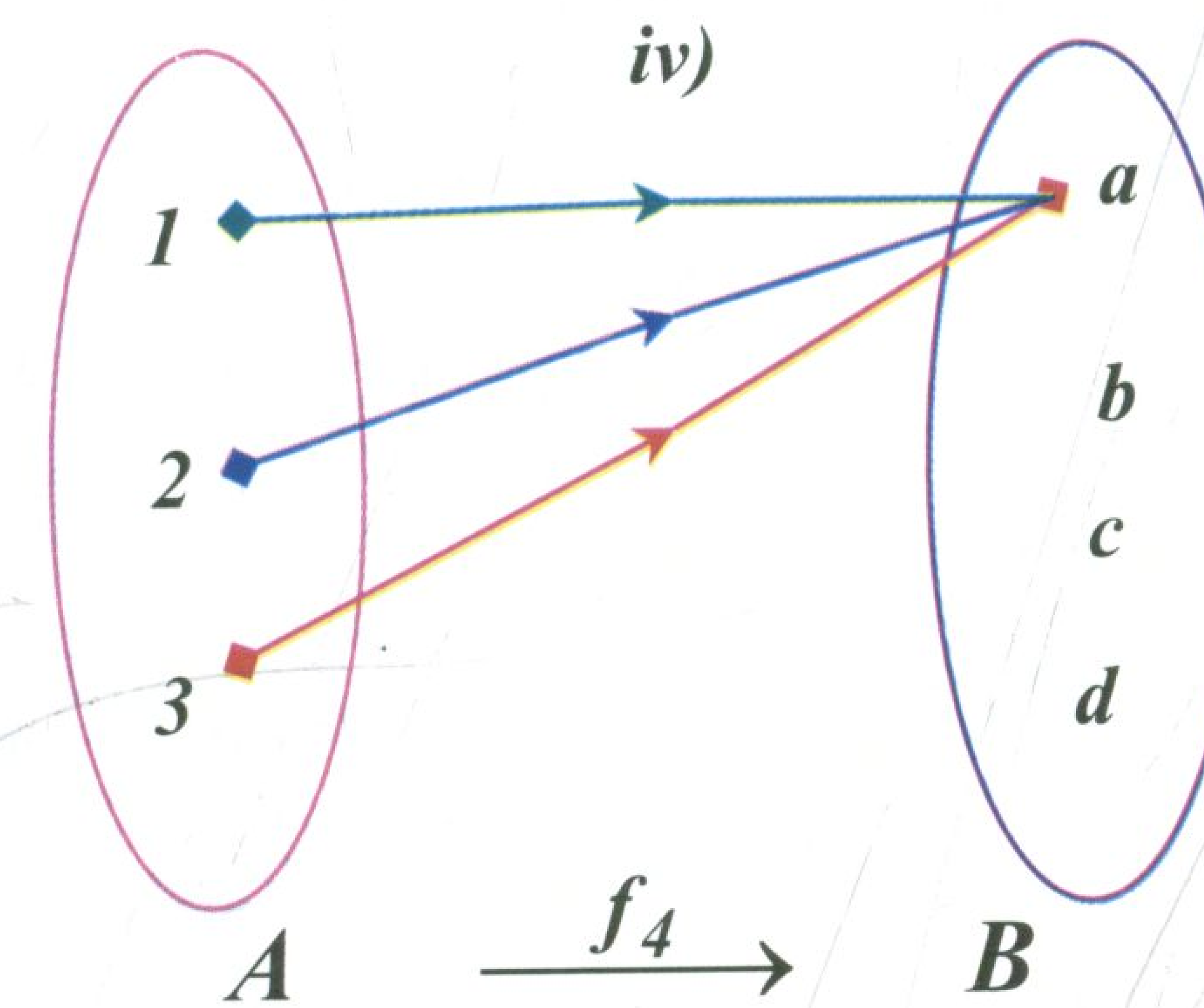
نلاحظ أن f_1 دالة، وذلك لأن كل عنصر من عناصر المجموعة A مرتبط بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B. أي أن $f_1(1) = a\ ,\ f_1(2) = b\ ,\ f_1(3) = b$.



نلاحظ أن f_2 علاقة وليست دالة، وذلك لأن العنصر « 1 » ارتبط بعنصرين من عناصر المجموعة B هما « b , c ». أي أن $f_1(1)=a\ ,\ f_1(2)=b\ ,\ f_1(3)=b$.



نلاحظ أن f_3 علاقة وليست دالة، وذلك لأن العنصر « 3 » لم يرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة B. أي أن $f_3(1)=a\ ,\ f_3(2)=d\ ,\ f_3(3)=?$.



نلاحظ أن f_4 تمثل دالة، وذلك لأن كل عنصر من عناصر المجموعة A مرتبط بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B. أي أن $f_4(1)=f_4(2)=f_4(3)=a$.

٤/١- مجال الدالة Domain of Function

يعرف مجال الدالة (نطاق الدالة) f من المجموعة A إلى المجموعة B ($f : A \rightarrow B$)، على أنه هو المجموعة A نفسها.

٤/٢- المجال المصاحب للدالة Co domain of Function

يعرف المجال المصاحب للدالة f (المجال المقابل – النطاق المصاحب) من المجموعة A إلى المجموعة B $(f : A \to B)$، على أنه هو المجموعة B نفسها.

٤/٣- مجال تعريف الدالة Domain of Definition of Function

يعرف مجال تعريف الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B $(f : A \to B)$، على أنه هو مجموعة العناصر التي تظهر كمركبة أولى في الدالة ويرمز له بالرمز d_f.

٤/٤- مدى الدالة Range of Function

يعرف مدى الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B $(f : A \to B)$، على أنه هو المجموعة الجزئية من المجال المصاحب B للدالة f والتي تتكون من جميع صور عناصر المجال A. ويرمز لمدى الدالة بالرمز $f(A)$ أو r_f. أي أن:

$$Range = r_f = f(A) = \{b \in B : b = f(a) \ , \ \forall a \in A\} \subset B$$

مثال (١٥): من بيانات مثال (١٤) نجد أن المجموعة A تمثل مجال الدالتين f_1 , f_4، كما أن المجال المصاحب للدالتين هو B. وأيضاً مدى الدالتين هو $r_{f_1} = \{a , b\} , r_{f_4} = \{a\}$.

٤/٥- مجال الدوال الحقيقية

أ – مجال دالة كثيرة الحدود

إذا كانت الدالة f كثيرة حدود، فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty , \infty)$ ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

ب – مجال الدالة الكسرية

إذا كانت f دالة كسرية معرفة بالصورة $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$، حيث $g(x) , h(x)$ كثيرتا حدود، فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $(R - \{\text{مجموعة أصفار المقام}\})$ أي أن $(d_f = R - \{x : h(x) = 0\})$.

ج – مجال الدالة الجذرية

إذا كانت f دالة جذرية معرفة بالصورة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ ، حيث أن العدد n ينتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويسمى دليل الجذر، كما أن $g(x)$ دالة كثيرة حدود، فإن مجال تعريفها هو:

١ – مجموعة الأعداد الحقيقية ($R=(-\infty,\infty)$)، إذا كان n عدد فردي.

٢ – مجموعة قيم x بشرط أن يكون $g(x)\geq 0$ ، إذا كان n عدد زوجي.

د – العمليات على الدوال الحقيقية

إذا كانت f_1 , f_2 دالتين مجال تعريفهما d_1 , d_2 على الترتيب فإن:

١ – مجال تعريف المجموع (الطرح) $f_1(x)\pm f_2(x)$ هو $d_1\cap d_2$.

٢ – مجال تعريف حاصل الضرب $f_1(x)\times f_2(x)$ هو $d_1\cap d_2$.

٣ – مجال تعريف خارج القسمة $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ هو $(d_1\cap d_2)-\{x: f_2(x)=0\}$.

مثال (١٦): أوجد مجال تعريف كلٍ من الدوال الحقيقية الآتية:

$i)\ f(x)=x^2-4$

$ii)\ f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

$iii)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+25}$

$iv)\ f(x)=\sqrt{x+2}$

$vi)\ f(x)=\sqrt[3]{9-x^2}$

$v)\ f(x)=\sqrt{4+x^2}$

الحل

(i) حيث إن الدالة كثيرة حدود وبالتالي فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $R=(-\infty\ ,\ \infty)$.

(ii) حيث إن الدالة كسرية وبالتالي فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام، بوضع:

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2 \ \ or \ \ x=3$$

وبالتالي فإن مجال الدالة هو $R-\{2\,,3\}$.

(iii) حيث إن الدالة كسرية وبالتالي فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام، بوضع:

$$x^2+25=0 \Rightarrow x^2=-25 \Rightarrow x=\sqrt{-25}$$

وبالتالي فإن الدالة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R، أي لا يوجد أصفار حقيقية للمقام. ومن ثم فإن مجال تعريف الدالة هو R.

(iv) حيث إن الدالة جذرية ودليل الجذر زوجي، وبالتالي فإن مجال تعريفها هو مجموعة قيم x الحقيقية بشرط:

$$x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$$

وبالتالي فإن مجال تعريف هذه الدالة هو $[-2\,,\infty)$.

(vi) حيث إن الدالة جذرية ودليل الجذر فردي، وبالتالي فإن مجال تعريفها هو R.

(v) حيث إن الدالة جذرية ودليل الجذر زوجي والمقدار $4+x^2>0$ دائماً، وبالتالي فإن مجال تعريفها هو R.

مثال (١٧): أوجد مجال تعريف كلٍ من الدوال الحقيقية الآتية:

$$i)\ f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x-2}$$

$$ii)\ f(x)=\sqrt{x-2}\times\sqrt{5-x}$$

$$iii)\ f(x)=\frac{6}{\sqrt{4-3x-x^2}}$$

$$iv)\ f(x)=\frac{4}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$$

الحل

(i) نفرض أن $f_1(x)=\frac{x}{x+1}\ ,\ f_2(x)=\frac{x+1}{x-2}$ دالتين، حيث أن الدالتين كسريتين وبالتالي فإن مجال تعريف $f_1(x)$ هو $d_{f_1}=(R-\{-1\})$، كما أن مجال $f_2(x)$ هو $d_{f_2}=(R-\{2\})$. ومن ثم فإن مجال الدالة $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ هو:

$$d_{f_1}\cap d_{f_2}=(R-\{-1\})\cap(R-\{2\})=R-\{-1\ ,\ 2\}$$

(ii) نفرض أن $f_1(x)=\sqrt{x-2}\ ,\ f_2(x)=\sqrt{5-x}$ دالتين، حيث أن الدالتين جذريتين وبالتالي فإن مجال تعريف $f_1(x)$ هو $d_{f_1}=x\geq 2=[2\ ,\ \infty)$، كما أن مجال تعريف $f_2(x)$ هو $d_{f_2}=x\leq 5=(-\infty\ ,\ 5]$. ومن ثم فإن مجال الدالة $f(x)=f_1(x)\times f_2(x)$ هو:

$$d_{f_1}\cap d_{f_2}=(-\infty\ ,\ 5]\cap[2\ ,\ \infty)=[2\ ,\ 5]$$

(iii) حيث إن الدالة كسرية وبالتالي فإن مجال تعريفها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام، كما أن المقام هو دالة جذرية، ومن ثم فإن:

$$4-3x-x^2>0\Rightarrow x^2+3x-4>0$$
$$\Rightarrow(x-1)(x+4)>0$$

نستخدم طريقة إشارة حدود المعادلة على خط الأعداد الحقيقية الواردة في الفصل الخامس، نجد أن الحل يقع داخل الفترة $(-4\ ,\ 1)$. وبالتالي فإن مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $(-4\ ,\ 1)$.

(iv) نفرض أن $f_1(x)=\frac{4}{x+2}\ ,\ f_2(x)=\sqrt{4-x^2}$ دالتين، وبالتالي فإن مجال تعريف $f_1(x)$ هو $d_{f_1}=(R-\{-2\})$، كما أن مجال $f_2(x)$ هو:

$$4-x^2\geq 0\ \Rightarrow\ x^2\leq 4$$

$$\Rightarrow\ |x|\leq 2\ \leftrightarrow\ -2\leq x\leq 2=[-2\ ,\ 2]=d_{f_2}$$

ومن ثم فإن مجال تعريف الدالة $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ هو:

$$d_{f_1}\cap d_{f_2}=(R-\{-2\})\cap[-2\ ,\ 2]=(-2\ ,\ 2]$$

مثال (١٨): أوجد مجال تعريف كلٍ من الدالتين الحقيقتين الآتيتين:

$$i)\ f(x)=\frac{1}{x^2-x}$$

$$ii)\ f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$$

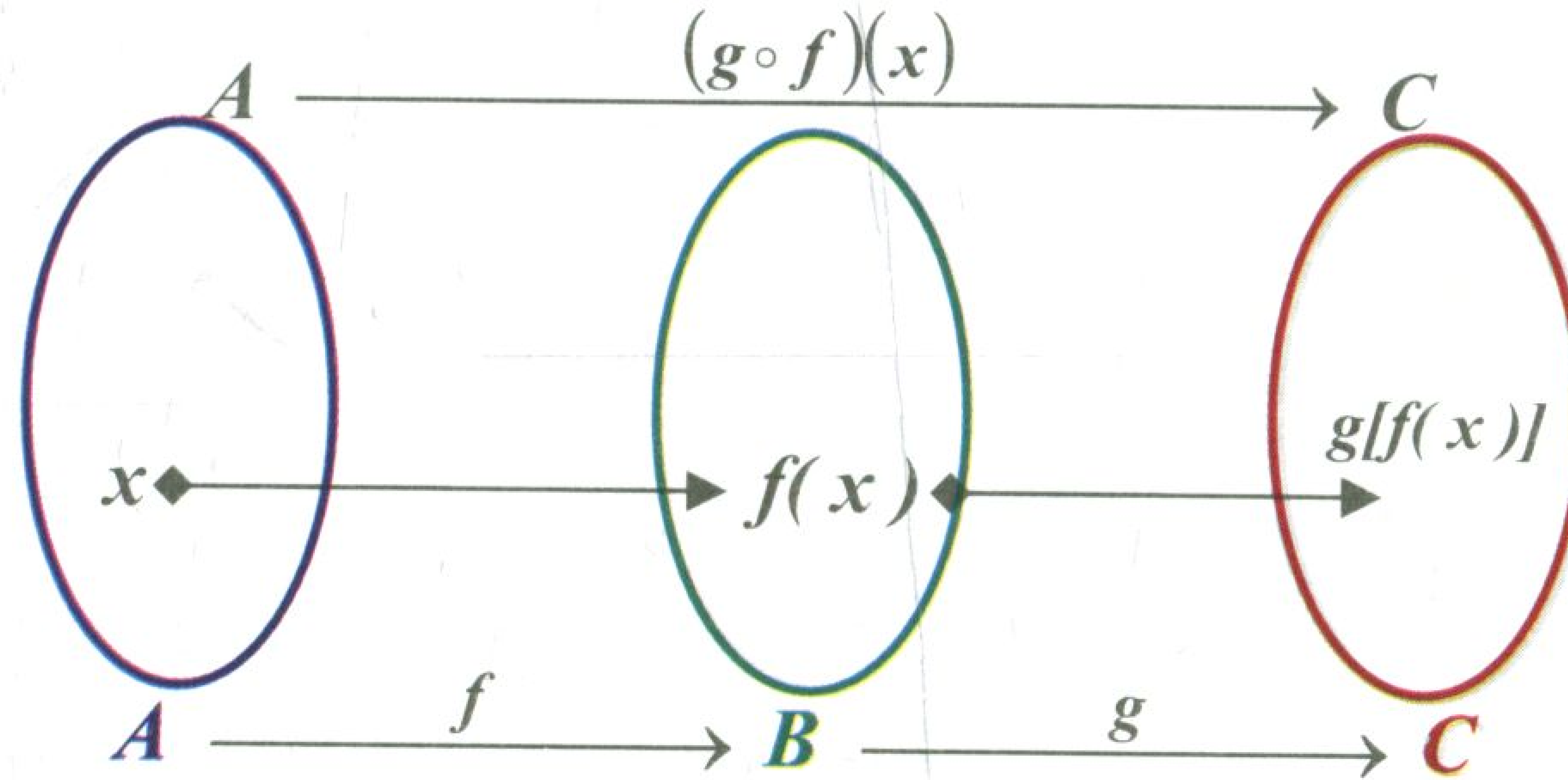
الحل متروك للقارئ

٦/٤- محصلة الدوال Composition of Functions

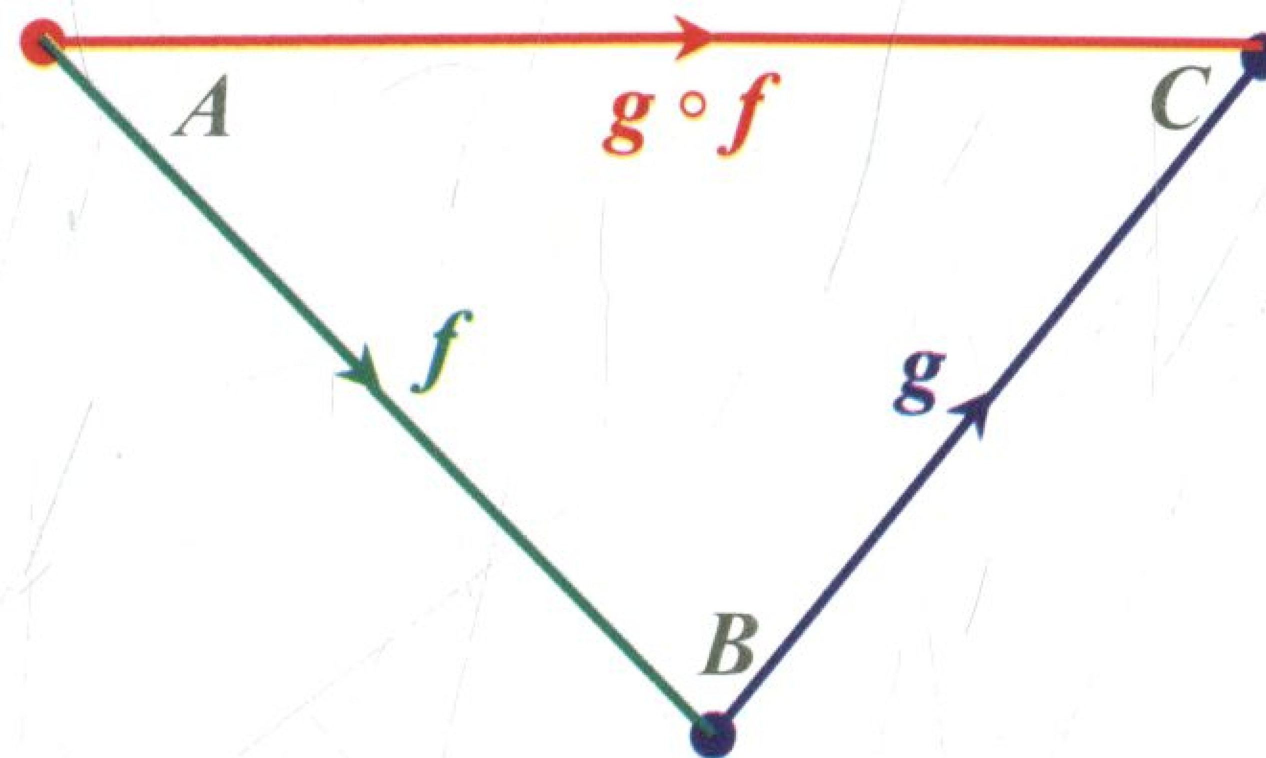
نفرض أن $f:A\to B$ دالة من المجموعة A إلى المجموعة B، ونفرض أن $g:B\to C$ دالة من المجموعة B إلى المجموعة C. يمكن تعريف دالة جديدة من المجموعة A إلى المجموعة C، يرمز لها بالرمز $g\circ f$، تعرف كالآتي:

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]\quad,\quad \forall\ x\in A\ \wedge\ g[f(x)]\in C$$

هذه الدالة تسمى محصلة الدالتين $f\ ,\ g$ (مركبة الدالتين – دالة الدالة Function of Function)، والتي يوضحها الشكل التالي:



كما يمكن تمثيل محصلة الدالتين f, g عادة بالشكل التالي:



مثال (١٩): نفرض أن $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{a,2,-6\}$ ثلاث مجموعات. ونفرض أن الدالة $f: A \to B$ تعرف كالآتي:

$$f=\{(a,2),(b,2),(c,1)\}$$

كما نفرض أن الدالة $g: B \to C$ تعرف كما يلي:

$$g=\{(1,a),(2,-6),(3,-6),(4,a)\}$$

باستخدام تعريف محصلة الدالتين f, g نجد أن:

$$(g \circ f)(a)=g[f(a)]=g(2)=-6$$

$$(g \circ f)(b)=g[f(b)]=g(2)=-6$$

$$(g \circ f)(c)=g[f(c)]=g(1)=a$$

أو بعبارة أخرى

$$g \circ f=\{(a,-6),(b,-6),(c,a)\}$$

مثال (٢٠): نفرض أن $X=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعة. ونفرض أن $f: X \to X$ دالة تعرف كالآتي:

$$f(1)=3\ ,\ f(2)=5\ ,\ f(3)=3\ ,\ f(4)=1\ ,\ f(5)=2$$

كما نفرض أن الدالة $g: X \to X$ تعرف كما يلي:

$$g(1)=4\ ,\ g(2)=1\ ,\ g(3)=1\ ,\ g(4)=2\ ,\ g(5)=3$$

أوجد $f \circ g\ ,\ g \circ f$، وهل $g \circ f = f \circ g$؟

الحل متروك للقارئ

مثال (٢١): نفرض أن $A=B=C=R$ حيث أن R هي مجموعة الأعداد الحقيقية. ونفرض أن $f: R \to R$ دالة تُعرف كالآتي:

$$f(x)=x^2+1$$

كما نفرض أن الدالة $g: R \to R$ تُعرف كما يلي:

$$g(x)=4x-6$$

أوجد $(f \circ g)(x)\ ,\ (g \circ f)(x)$. ثم أوجد مجال كل منهما.

الحل

حيث إن محصلة الدالتين f, g $(g \circ f: R \to R)$ تُعرف كالآتي:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2+1) = 4(x^2+1) - 6 = 4x^2 - 2$$

كما أن $f \circ g: R \to R$ تُعرف كالآتي:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(4x-6) = (4x-6)^2 + 1$$
$$= 16x^2 - 48x + 37$$

نلاحظ أن:

$$d_f = d_g = d_{g \circ f} = d_{f \circ g} = R$$

مثال (٢٢): نفرض أن $A = B = C = R$ حيث إن R هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

ونفرض أن $f: R \to R$ دالة تُعرف كالآتي:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

كما نفرض أن الدالة $g: R \to R$ تعرف كما يلي:

$$g(x) = \sqrt{2-x}$$

أوجد كلٍ من الدوال التالية:

$$(g \circ f)(x) \;,\; (f \circ g)(x) \;,\; (f \circ f)(x) \;,\; (g \circ g)(x)$$

ثم أوجد مجال كل هذه الدوال.

الحل متروك للطالب

٧/٤- الدوال الزوجية والفردية The Even and Odd Functions

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها:

♦ زوجية إذا تحقق الشرط:

$$f(-x) = f(x) \quad , \quad \forall x, -x \in A$$

♦ فردية إذا تحقق الشرط:

$$f(-x) = -f(x) \quad , \quad \forall x, -x \in A$$

ملاحظات

١ – دالة زوجية + دالة زوجية = دالة زوجية.

٢ – دالة فردية + دالة فردية = دالة فردية.

٣ – دالة زوجية + دالة فردية = دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ – دالة زوجية × دالة زوجية = دالة زوجية.

٥ – دالة فردية × دالة فردية = دالة زوجية.

٦ – دالة زوجية × دالة فردية = دالة فردية.

٧ – دالة زوجية ÷ دالة فردية = دالة فردية ÷ دالة زوجية = دالة فردية.

٨ – منحنى الدالة الزوجية يتماثل حول محور Y.

٩ – منحنى الدالة الفردية يتماثل حول نقطة الأصل.

مثال (٢٣): ابحث عن ما إذا كانت الدوال التالية زوجية أو فردية أو غير ذلك:

$$i)\ f(x)=3x^4-5x^2+1$$

$$ii)\ f(x)=x^3+2x-5$$

$$iii)\ f(x)=x^2-3x+2$$

$$iv)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

الحل

بالتعويض عن قيمة x بالمتغير $(-x)$ في كل الدوال للحصول على:

$$i)\ f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+1=3x^4-5x^2+1=f(x)$$

وبالتالي فإن الدالة زوجية.

$$ii)\ f(-x)=(-x)^3+2x-5=-x^3-2x-5$$

$$=-\left(x^3+2x+5\right)$$

$$\Rightarrow\quad f(-x)\neq -f(x)\quad and\quad f(-x)\neq f(x)$$

وبالتالي فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

$$iii)\ f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2=-\left(-x^2-3x-2\right)$$

$$\Rightarrow\quad f(-x)\neq -f(x)\quad and\quad f(-x)\neq f(x)$$

وبالتالي فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

$$iv)\ f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+5}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+5}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow\quad f(-x)=-f(x)$$

وبالتالي فإن الدالة فردية.

مثال (٢٤): ابحث عن ما إذا كانت الدوال التالية زوجية أو فردية أو غير ذلك:

$$i)\ f(x)=3x^2+2x^2-1$$

$$ii)\ f(x)=3x-\sqrt{2}$$

$$iii)\ f(x)=\sqrt{x-1}$$

$$iv)\ f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

الحل متروك للقارئ.

٤/٨- الدالة العكسية The Inverse Function

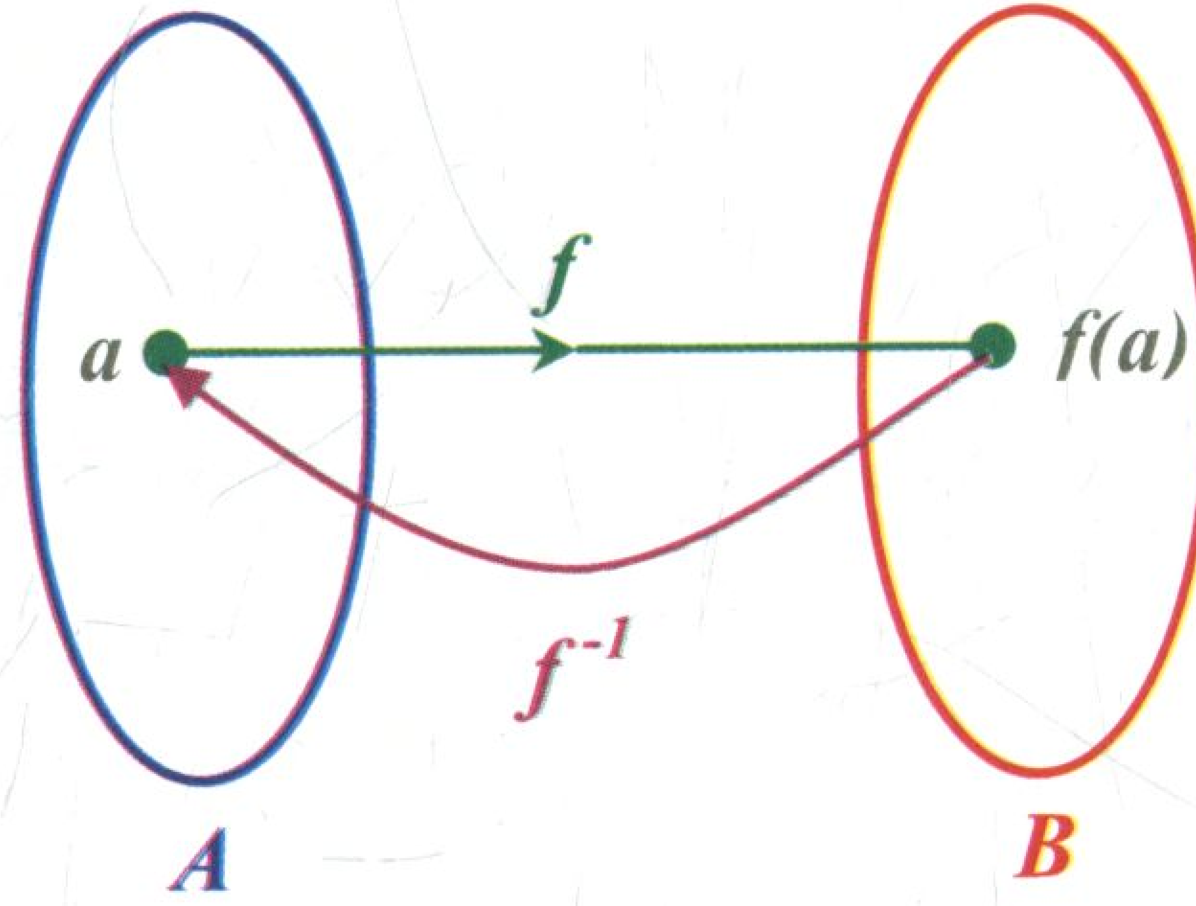
نعلم أن أي دالة هي في الأصل علاقة، وبالطبع كل علاقة لها علاقة عكسية. ولكن هل هذه العلاقة العكسية دالة؟ (قد تكون هذه الإجابة لا). ونحاول هنا الإجابة على السؤال: ما هي الدالة التي يكون لها دالة عكسية؟

نفرض أن $f:A\to B\ ,\ g:B\to A$ دالتين بحيث أن $g\circ f\ ,\ f\circ g$ معرفتان. فإذا كان $g\circ f=I_A\ ,\ f\circ g=I_B$ ، فإن f تكون دالة عكسية للدالة g، وأن g تكون دالة عكسية للدالة f، عادة ما يرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} . أي أن $f\circ f^{-1}=I_B=I\ ,\ f^{-1}\circ f=I_A=I$. حيث $I_A=I$ تسمى دالة الوحدة (الدالة المحايدة). وتعرف كالآتي:

يقال للدالة $f:A\to A$ أنها دالة الوحدة، إذا كانت الدالة f تحدد لكل عنصر في A بالعنصر نفسه. أي أن:

$$f(a)=a\quad ,\quad \forall\ a\in A$$

إذا كان $b \in B$ فإن $f^{-1}(b) = a$ حيث a هو العنصر الوحيد من المجموعة A الذي يحقق $f(a) = b$. ويمكن توضيح الدالة العكسية بالشكل التالي:



مثال (٢٥): نفرض أن $A = \{a, b, c\}, B = \{5, -9, 0\}$ مجموعتان. ويمكن تعريف الدالة $f : A \to B$ كالآتي:

$$f(a) = -9 \quad , \quad f(b) = 0 \quad , \quad f(c) = 5$$

وبالتالي فإن الدالة العكسية $f^{-1} : B \to A$ يمكن كتابتها كالآتي:

$$f^{-1}(5) = c \quad , \quad f^{-1}(-9) = a \quad , \quad f^{-1}(0) = b$$

مثال (٢٦): مستخدماً محصلة الدوال، أثبت أن الدالتين الآتيتين كلٍ منهما معكوساً للأخرى:

$$f(x) = 3x \quad , \quad g(x) = \frac{x}{3}$$

الحل

باستخدام تعريف محصلة الدوال نجد أن:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x) = \frac{3x}{3} = x \ ,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \times \frac{x}{3} = x$$

وحيث إن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$، وبالتالي فإن الدالتين $f \ , \ g$ معكوستين لبعضهما.

مثال (٢٧): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+2} \quad , \quad x\neq -2$$

الحل

نفرض أن $y=f(x)$ ، وبالتالي فإن:

$$y=\frac{3x-2}{x+2} \Rightarrow y(x+2)=3x-2 \Rightarrow yx+2y=3x-2$$

$$\Rightarrow (y-3)\,x=-2(y+1) \Rightarrow x=-\frac{2(y+1)}{y-3}$$

أي أن الدالة العكسية هي:

$$f^{-1}(y)=-\frac{2(y+1)}{y-3} \quad , \quad y\neq 3$$

تمارين

١ – إذا كانت A, B, C, D أربع مجموعات، أثبت صحة الخواص التالية:

$i)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$ii)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$iii)\ A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

$iv)\ A\times(B\,\Delta\,C)=(A\times B)\,\Delta\,(A\times C)$

$v)\ A\times B=A\times C \;\leftrightarrow\; B=C$

$vi)\ A\times B=B\times A \;\leftrightarrow\; A=B\ ,\ A\neq\Phi\wedge B\neq\Phi$

$vii)\ if\ \ E\subset A\wedge F\subset B \;\rightarrow\; E\times F\subset A\times B$

$viii)\ A\times B=\Phi \;\leftrightarrow\; A=\Phi\vee B=\Phi$

$ix)\ |A|=m\ ,\ |B|=n \Rightarrow |A\times B|=mn$

$x)\ (A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$

$xi)\ (A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cap B)\times(C\cap D)$

٢ – أثبت أن علاقة التوازي على مجموعة المستقيمات في المستوى الإقليدي علاقة تكافؤ.

٣ – أثبت أن علاقة التعامد بين مستقيمات المستوى الإقليدي ليست علاقة تكافؤ.

٤ – أثبت أن علاقة يقسم على في مجموعة الأعداد الطبيعية N ليست علاقة تكافؤ.

٥ – أثبت أن علاقة التساوي في أي مجموعة هي علاقة تكافؤ.

٦ – أثبت أن علاقة الاحتواء في المجموعات ليست علاقة تكافؤ.

٧ – أوجد مجال تعريف كلٍ من الدوال الحقيقية الآتية:

1) $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$

2) $f(x)=\frac{x}{x^2-3x-10}$

3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

4) $f(x)=\frac{x-3}{6-x-x^2}$

5) $f(x)=\sqrt{x-1}$

6) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

7) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^3-9x}$

9) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}$

10) $f(x)=\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}$

11) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$

12) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}-\sqrt{x-1}$

13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x-7}$

14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-1}$

15) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-2}$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2-4}$

17) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}$

18) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$

19) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}+3}$

18) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^3-4x}$

٨ – أوجد المحصلات $g\circ g$, $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية:

$i)\ f(x)=\frac{x}{x-1}$

$g(x)=\sqrt{1+x^2}$

$ii)\ f(x)=\frac{1}{x+3}$

$g(x)=x^2+x$

$iii)\ f(x)=\frac{2}{x-1}$

$g(x)=x^3+3$

$iv)\ f(x)=\frac{2}{x}$

$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

$v)\ f(x)=2x^2-x$

$g(x)=3x+2$

$vi)\ f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=\sqrt{2-x}$

٩ – ابحث عن ما إذا كانت الدوال التالية زوجية أم فردية أم غير ذلك:

$i)\ f(x)=4x^3-2x+7$

$ii)\ f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$iii)\ f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

$iv)\ f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3$

$v)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-1}}$

$vi)\ f(x)=3x^3+2x^2+1$

$vii)\ f(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$

$viii)\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-4x}$

$x)\ f(x)=(3x^3+5x)^2$

$xi)\ f(x)=3x^7-21x$

١٠ - أوجد الدالة العكسية للدوال التالية إن وجدت:

$1)\ f=\{(-3,1),(-2,2),(1,5),(4,-7)\}$

$2)\ f=\{(-5,4),(-2,3),(0,1),(3,2),(7,11)\}$

$3)\ f=\{(0,1),(1,2),(2,4),(3,8),(4,16)\}$

$4)\ f=\{(1,0),(10,1),(100,2),(1000,3)\}$

5) $f(x) = -2x + 5$

6) $f(x) = 2x$

7) $f(x) = 3x - 6$

8) $f(x) = 3x + 8$

9) $f(x) = x^2 + 2$

10) $f(x) = -2x - 8$

11) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x \neq 1$

12) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, $x \neq -3$

13) $f(x) = \frac{4x}{x+4}$, $x \neq -4$

14) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $x \neq 2$

15) $f(x) = \sqrt{9-x}$, $x \leq 9$

الفصل السابع

مبادئ حساب المثلثات

ELEMENTARY OF TRIGONOMETRY

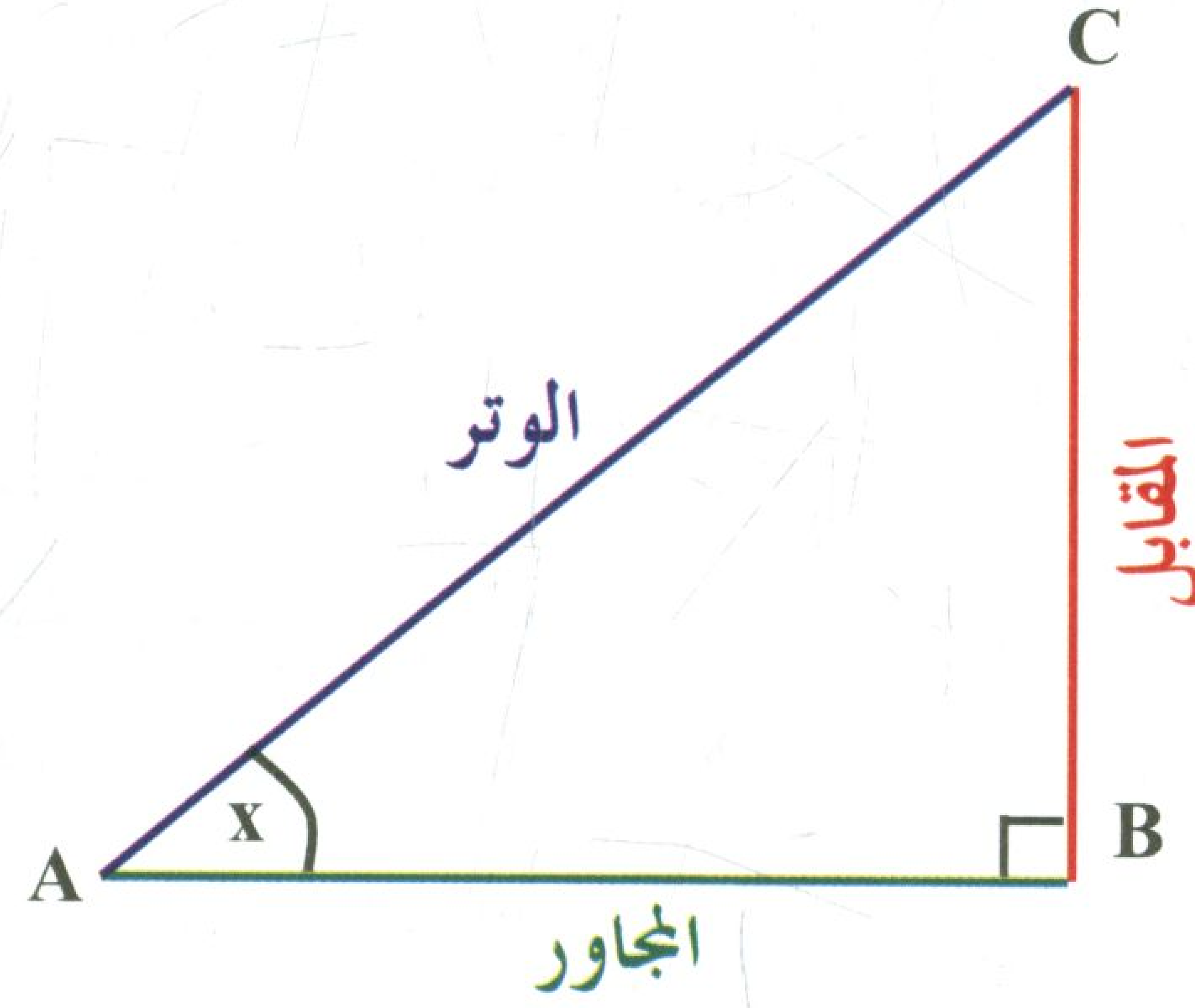
مقدمة Introduction

درسنا في مراحل التعليم العام بعض الخصائص الأساسية باختصار لعلم حساب المثلثات، فعلمنا أن الزاوية ما هي إلا اتحاد ضلعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى رأس الزاوية. تعرفنا أيضاً على وحدات قياس الزاوية، مثل القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية والعلاقة بينهما. كما درسنا أيضاً الدوال المثلثية والعلاقات الأساسية بينها، وهذه الدوال تُعْرَف على أنها دوال لزاوية هندسية.

في هذا الفصل ندرس باستفاضة الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة على أنها نسبة بين أضلاع مثلث قائم الزاوية كإحداثيات على دائرة الوحدة والتي تسمى أحياناً بالدوال الدائرية، وكذلك دراسة تطبيقات عملية على مثل هذا النوع من المثلثات، وأيضاً التطبيق العملي على الآلة الحاسبة (حاسبة الجيب). ويسبق هذه الدراسة بعض التعريفات والمفاهيم الأساسية كمدخل أساسي لعلم حساب المثلثات.

أولاً: الدوال المثلثية للزاوية الحادة

نفــرض أن ABC مثل قائم الزاوية عند الزاويـــة ABC (تكتـــب اختــصاراً الزاويـــة B)، أي أن قيـــاس الزاوية B هو $\pi/2 = 90^{\circ}$ ، كما أن قياس الزاويـــة A هو x، حيث $0 < x < \pi/2$. وبالتالي فإنه يمكن استنتاج تعريـــف الـــدوال المثلثيـــة للزاوية الحادة x المرسومة في المثلث قائم الزاوية الموضح كالآتي:



شكل (١)

جيب الزاوية $= \sin e\, x = \sin x$

$$= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{Opposite}{Hypotenuse} = \frac{opp}{hyp} = \frac{BC}{AC}$$

جيب تمام الزاوية $= \cos ine\, x = \cos x$

$$= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{Adjacent}{Hypotenuse} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AB}{AC}$$

ظل الزاوية $= \tan gent\, x = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{Opposite}{Adjacent} = \frac{opp}{adj} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{ظل تمام الزاوية} = \cot angent\ x = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{Adjacent}{Opposite} = \frac{adj}{opp} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{قاطع الزاوية} = \sec ant\ x = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{Hypotenuse}{Adjacent} = \frac{hyp}{adj} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{قاطع تمام الزاوية} = \cos ecant\ x = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{Hypotenuse}{Opposite} = \frac{hyp}{opp} = \frac{AB}{BC}$$

ملاحظات

- لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع المثلث قائم الزاوية في شكل (١) بمعلومية الضلعين الآخرين، نستخدم نظرية فيثاغورث التالية:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

- في المثلث قائم الزاوية في شكل (١)، نجد أن الزاويتين A , C متتامتان، أي أن مجموعهما يساوي $\pi/2 = 90^\circ$، فإن:

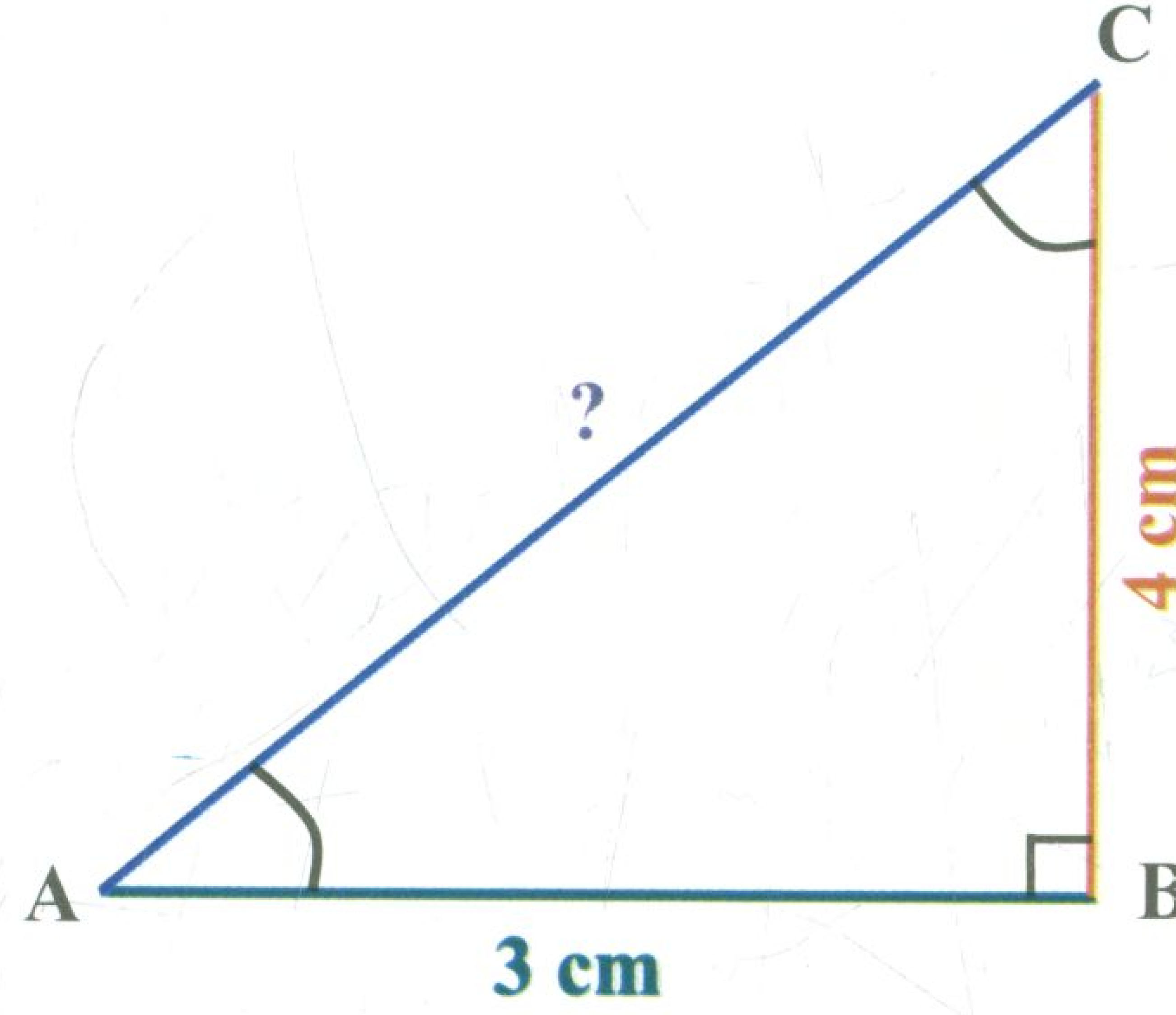
$$\sin A = \cos C \ , \ \cos A = \sin C \ , \ \tan A = \cot C \ ,$$

$$\cot A = \tan C \ , \ \sec A = \csc C \ , \ \csc A = \sec C$$

مثال (١): المثلث ABC قائم الزاوية في B، حيث $AB = 3\ cm$ كما أن $BC = 4\ cm$.
أوجد جميع الدوال المثلثية لكل من الزاويتين A , C.

الحل

حيث إن المثلث ABC قائم الزاوية في B، كما يمثلها الشكل التالي:



شكل (٢)

من شكل (٢) بتطبيق نظرية فيثاغورث، نجد أن:

$$(AC)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25\ cm$$

$$\Rightarrow \quad AC = 5\ cm$$

باستخدام خواص الزاويتين المتتامتين، نحصل على:

$$\sin A = \cos C = \frac{4}{5}\ ,\ \cos A = \sin C = \frac{3}{5}\ ,\ \tan A = \cot C = \frac{4}{3}\ ,$$

$$\cot A = \tan C = \frac{3}{4}\ ,\ \sec A = \csc C = \frac{5}{3}\ ,\ \csc A = \sec C = \frac{5}{4}$$

مثال (٢): إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B، حيث الضلع $AB = 9\ cm$ كما أن $BC = 12\ cm$. أوجد جميع الدوال المثلثية لكل من الزاويتين A , C.

الحل متروك للقارئ.

مثال (٣): المثلث ABC فيه $AC = BC = 10\ cm$ كما أن $AB = 12\ cm$. رسم CD عمودياً على AB في D.

أ – أوجد قيمة $\sin B + \cos A$.

ب – أوجد قيمة $\tan(\angle ACD)$.

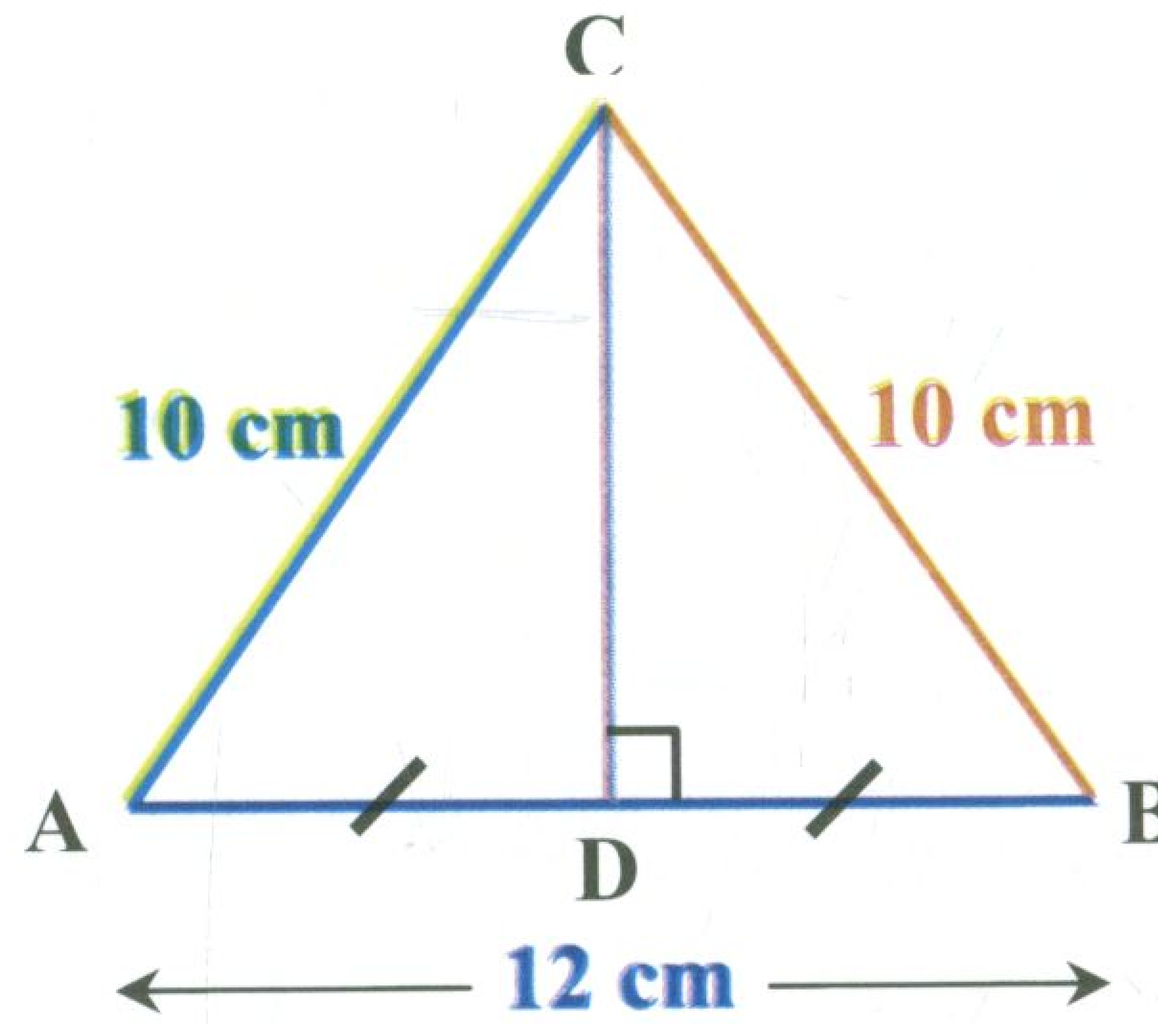
ج – أثبت أن $\sin A + \cos A > 1$.

د – أوجد قيمة $\sin^2 A + \cos^2 A$

هـ – قارن بين $\sin^2 A + \cos^2 A$ و $\sin A + \cos A$.

الحل

حيث أن CD عمودياً على AB في D، كما أن $AC = BC = 10\ cm$، وأيضاً $AB = 12\ cm$، وبالتالي فإن $AD = DB = 6\ cm$ (أي أن D هي منتصف AB). ومن ثم فإنه يمكن توضيح ذلك من خلال الرسم التالي:



بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ADC نجد أن:

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

$$(10)^2 = (6)^2 + (DC)^2 \Rightarrow 100 = 36 + (DC)^2$$

$$\Rightarrow (DC)^2 = 100 - 36 = 64\ cm$$

$$\Rightarrow DC = 8\ cm$$

أ – من المثلث نجد أن:

$$\sin B + \cos A = \frac{CD}{BC} + \frac{AD}{AC} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{5}$$

ب – من المثلث نحصل على:

$$\tan(\angle ACD) = \frac{AD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

ج – من المثلث نجد أن:

$$\sin A + \cos A = \frac{DC}{AC} + \frac{AD}{AC} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} > 1$$

د – مما سبق نستنتج أن:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

هـ – من ج ، د نجد أن:

$$\sin^2 A + \cos^2 A < \sin A + \cos A$$

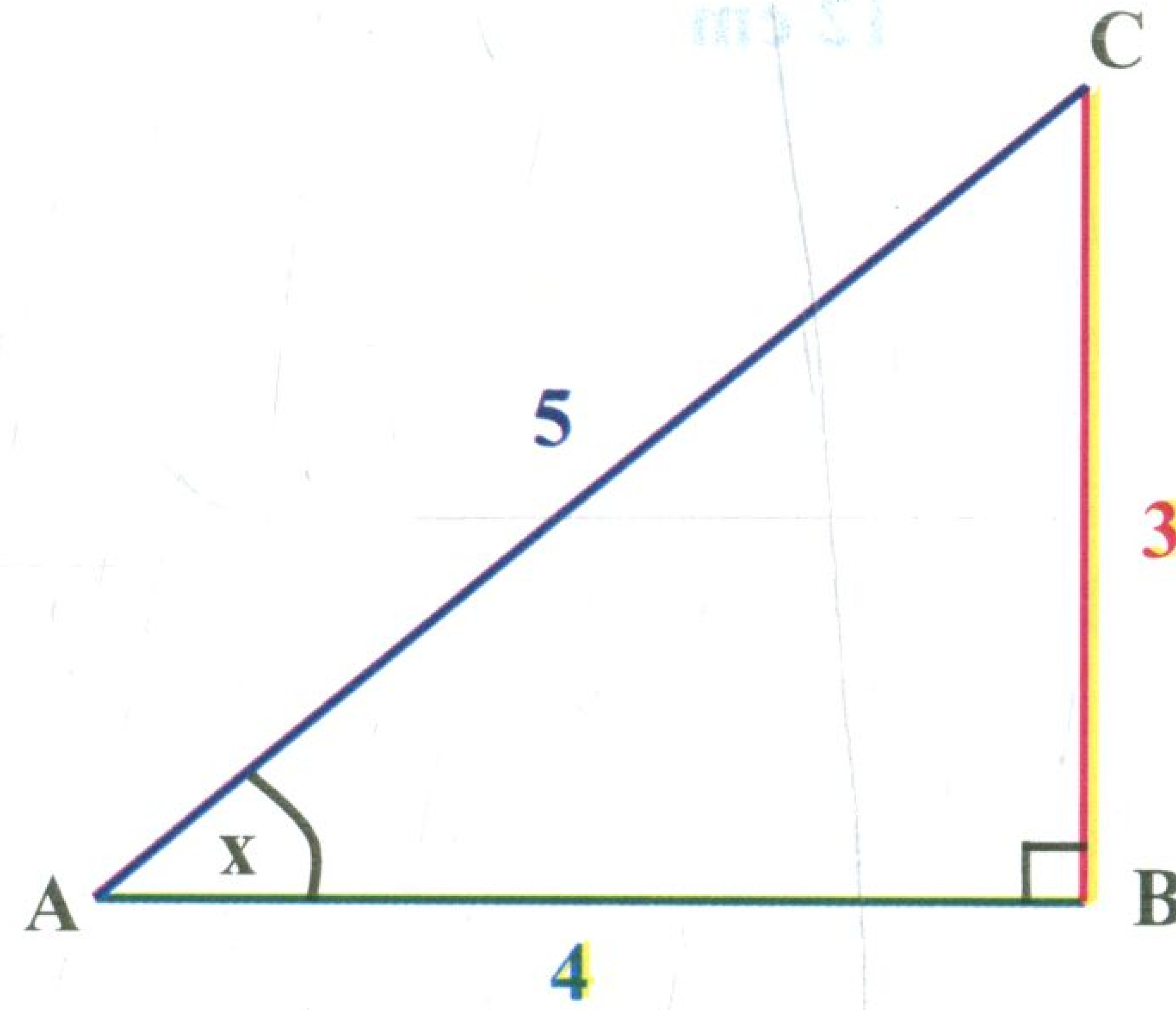
مثال (٤): إذا كان:

$$3\csc x - 5 = 0 \quad \text{such that} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

أوجد قيمة $\sec x - \tan x$.

الحل

برسم مثلث قائم الزاوية عند B كالآتى:



حيث إن:

$$3\csc x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; 3\csc x = 5 \;\Rightarrow\; \csc x = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad BC = 3$ وحدات , $AC = 5$ وحدات

باستخدام نظرية فيثاغورث نجد أن:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(5)^2 = (AB)^2 + (3)^2 \quad \Rightarrow \quad 25 = (AB)^2 + 9$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^2 = 25 - 9 = 16 \text{ وحدة}$$

$$\Rightarrow \quad AB = 4 \text{ وحدات}$$

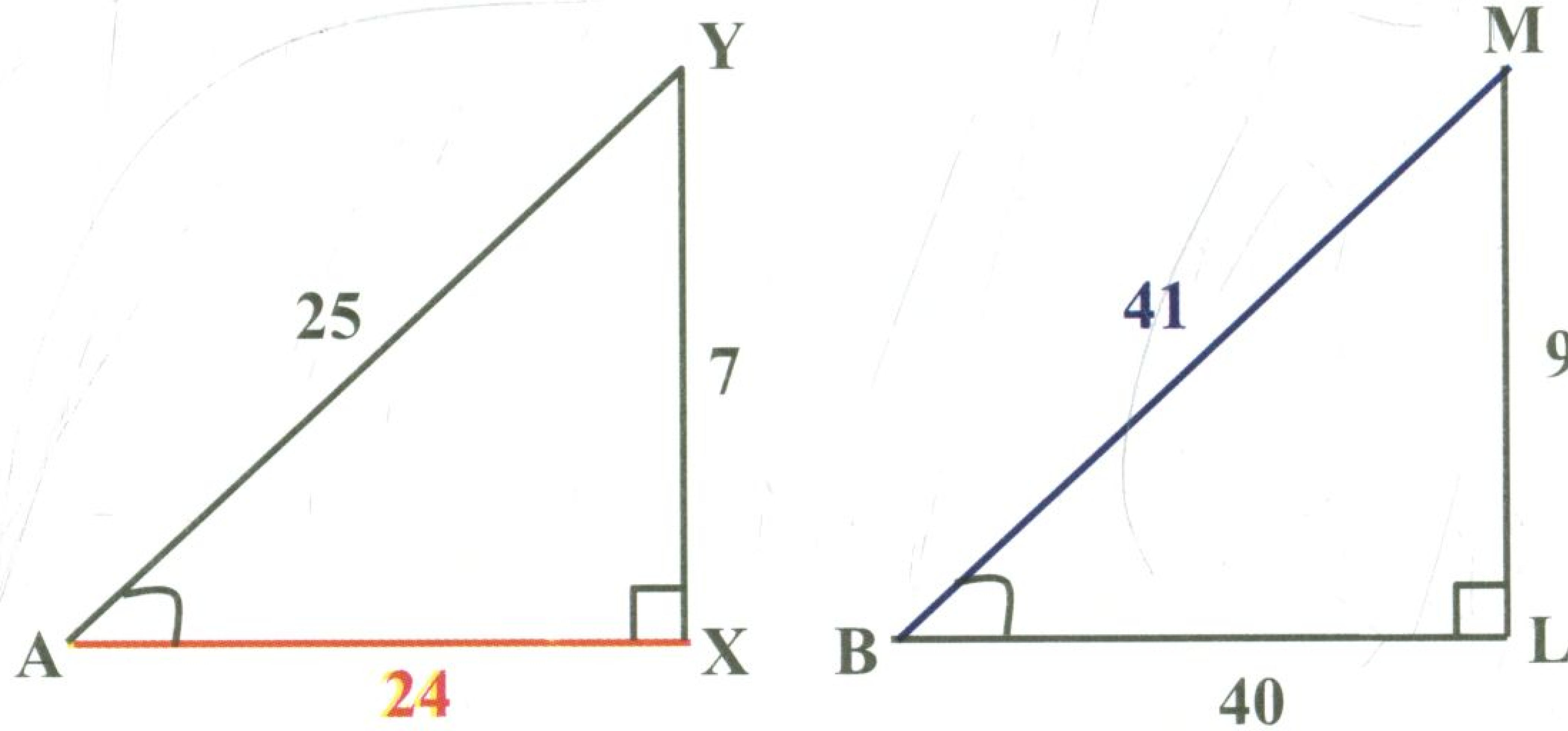
وبالتالي فإن:

$$\sec x - \tan x = \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال (٥): إذا كان $\tan B = \frac{9}{40}$, $\sin A = \frac{7}{25}$، حيث A , B زاويتان حادتان موجبتان في مثلثين مختلفين، أوجد قيمة $\frac{5\cos A + 8\tan B}{3\csc B + 8\sec A}$.

الحل

برسم المثلثين AXY , BLM قائمي الزاوية في X , L على الترتيب مع استخدام $\sin A = \frac{7}{25}$ في المثلث AXY، وأيضاً استخدام $\tan B = \frac{9}{40}$ في المثلث BLM كالآتي:



باستخدام نظرية فيثاغورث في المثلثين AXY , BLM المذكورين على الترتيب نجد أن:

$$(AY)^2 = (AX)^2 + (XY)^2$$

$$(25)^2 = (AX)^2 + (7)^2 \quad \Rightarrow \quad 625 = (AX)^2 + 49$$

$$\Rightarrow \quad (AX)^2 = 625 - 49 = 576$$ وحدة

$$\Rightarrow \quad AX = 24$$ وحدة

وأيضاً:

$$(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2$$

$$(BM)^2 = (40)^2 + (9)^2 \quad \Rightarrow \quad (BM)^2 = 1600 + 81 = 1681$$

$$\Rightarrow \quad BM = 41$$ وحدة

وبالتالي فإن:

$$\frac{5\times\frac{24}{25}+8\times\frac{9}{40}}{3\times\frac{41}{9}+8\times\frac{25}{24}} = \frac{\frac{24}{5}+\frac{9}{5}}{\frac{41}{3}+\frac{25}{3}} = \frac{33/5}{66/3} = \frac{33}{5}\times\frac{3}{66} = \frac{3}{10} = 0.3$$

ثانياً: الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

لأهمية الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة في إزالة الكثير من الصعوبات التي يواجهها الطالب في جميع دراساته لمعظم مقررات الرياضيات، يمكن تلخيصها في جدول كالآتي:

قياس الزاوية / الدالة المثلثية	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	0
$\cot x$	غير معرف	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	غير معرف
$\sec x$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	غير معرف	-1
$\csc x$	غير معرف	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	غيرمعرف

ثالثاً: استخدام الآلات الحاسبة

يمكن استخدام الآلات الحاسبة (حاسبات الجيب) في إيجاد جميع قيم الدوال المثلثية لزوايا معلومة، وتوجد عدة أنواع من الآلات منها الإصدارين الآتيين وما يليهما حداثة:

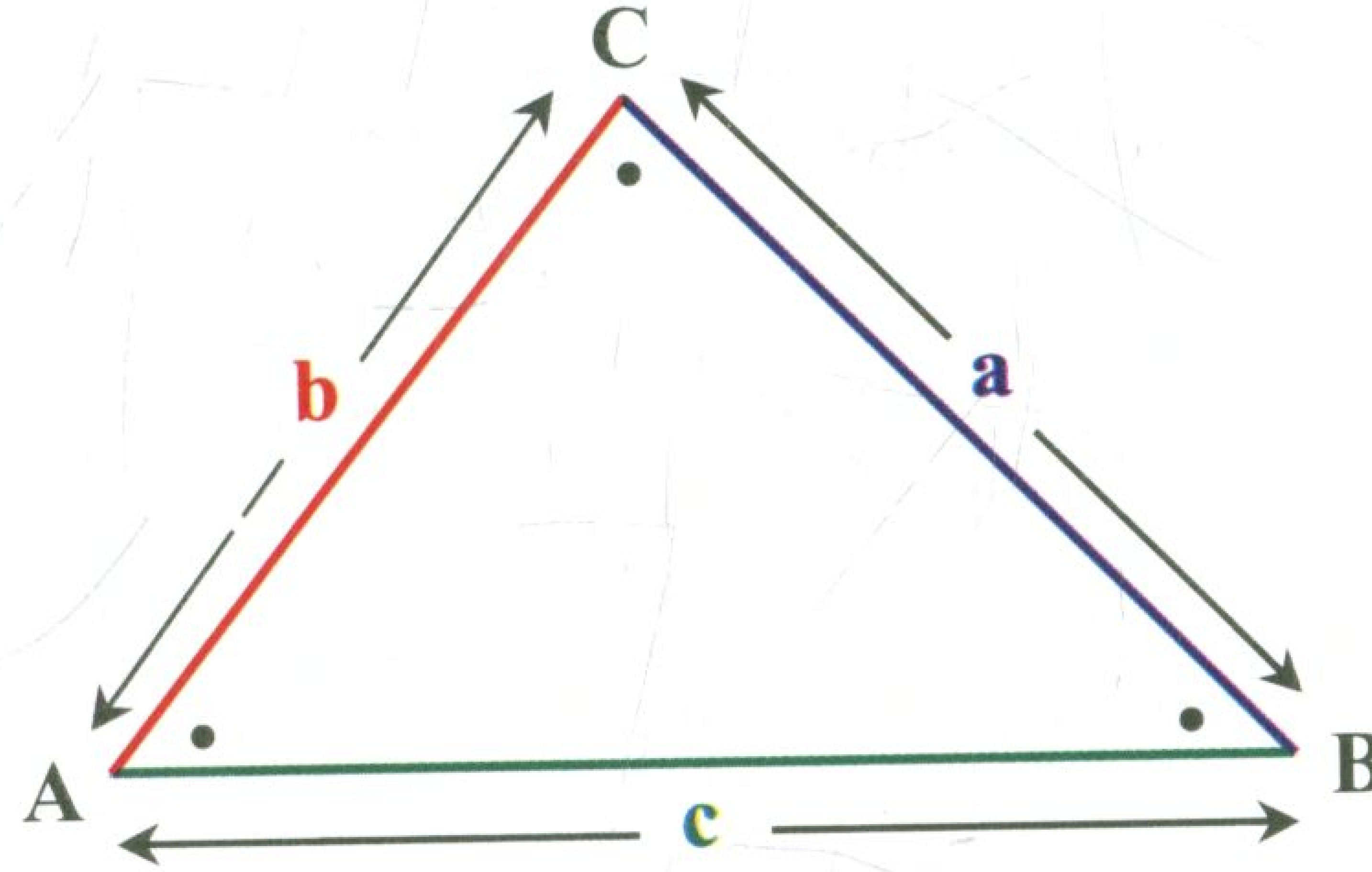
CASIO SCIENTIFIC CALCULATOR *fx-500ES* , *fx-991ES*

تدريب

يمكن استخدام الآلة الحاسبة للتدريب على حساب جميع الدوال المثلثية ذات الزوايا المذكورة في الجدول أعلاه، وكذلك أي زاوية أخرى أياً كانت. وأيضاً يمكن إيجاد قياس الزوايا إذا علمت إحدى دوالها المثلثية.

رابعاً: قاعدة الجيب Sine Rule

تستخدم هذه القاعدة لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث، إذا عُلِمَ قياس زاويتين وطول ضلع فيه. وأيضاً إذا عُلِمَ طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحد الضلعين المعلومين. وتنص قاعدة الجيب على « في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع جيوب الزوايا المقابلة لها ». أي أنه في المثلث ABC الآتي:



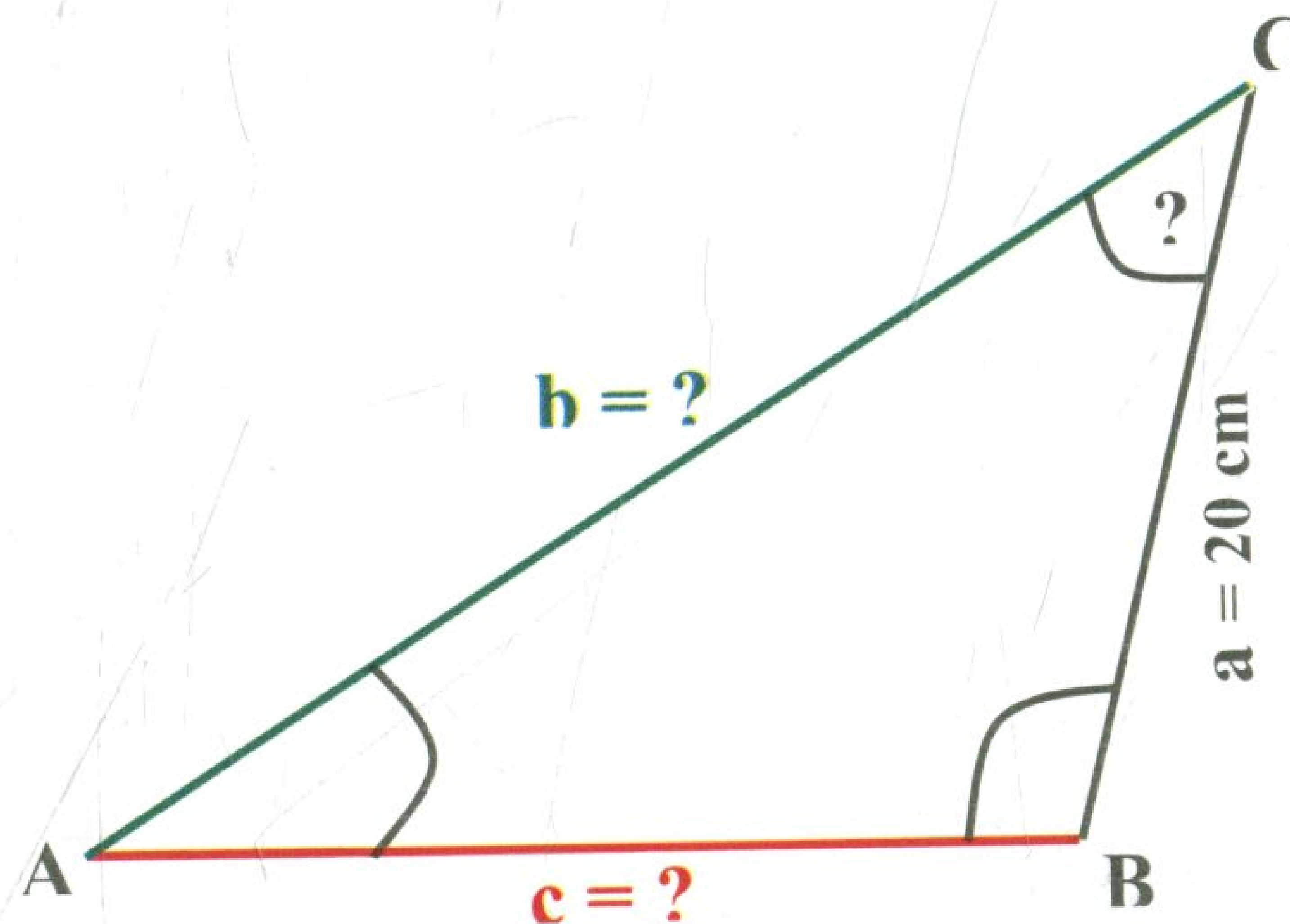
يكون
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

حيث A , B , C ترمز لقياسات زوايا المثلث ABC، كما أن a , b , c ترمز لأطوال الأضلاع BC , AC , AB على الترتيب.

مثال (٦): في المثلث ABC، قياس زاوية A تساوي $38°52'$، كما أن قياس زاوية B تساوي $96°51'$، وطول الضلع a يساوي $20\ cm$. أوجد طولا الضلعين b , c.

الحل

نرسم المثلث التالي لتوضيح الحل:



حيث إن مجموع زوايا المثلث تساوي $180°$، وبالتالي فإن:

$$\angle C = 180° - (38°\ 52' + 96°\ 51') = 44°\ 17'$$

ومن ثم فإن:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{\sin 38°\ 52'} = \frac{b}{\sin 96°\ 51'} = \frac{c}{\sin 44°\ 17'}$$

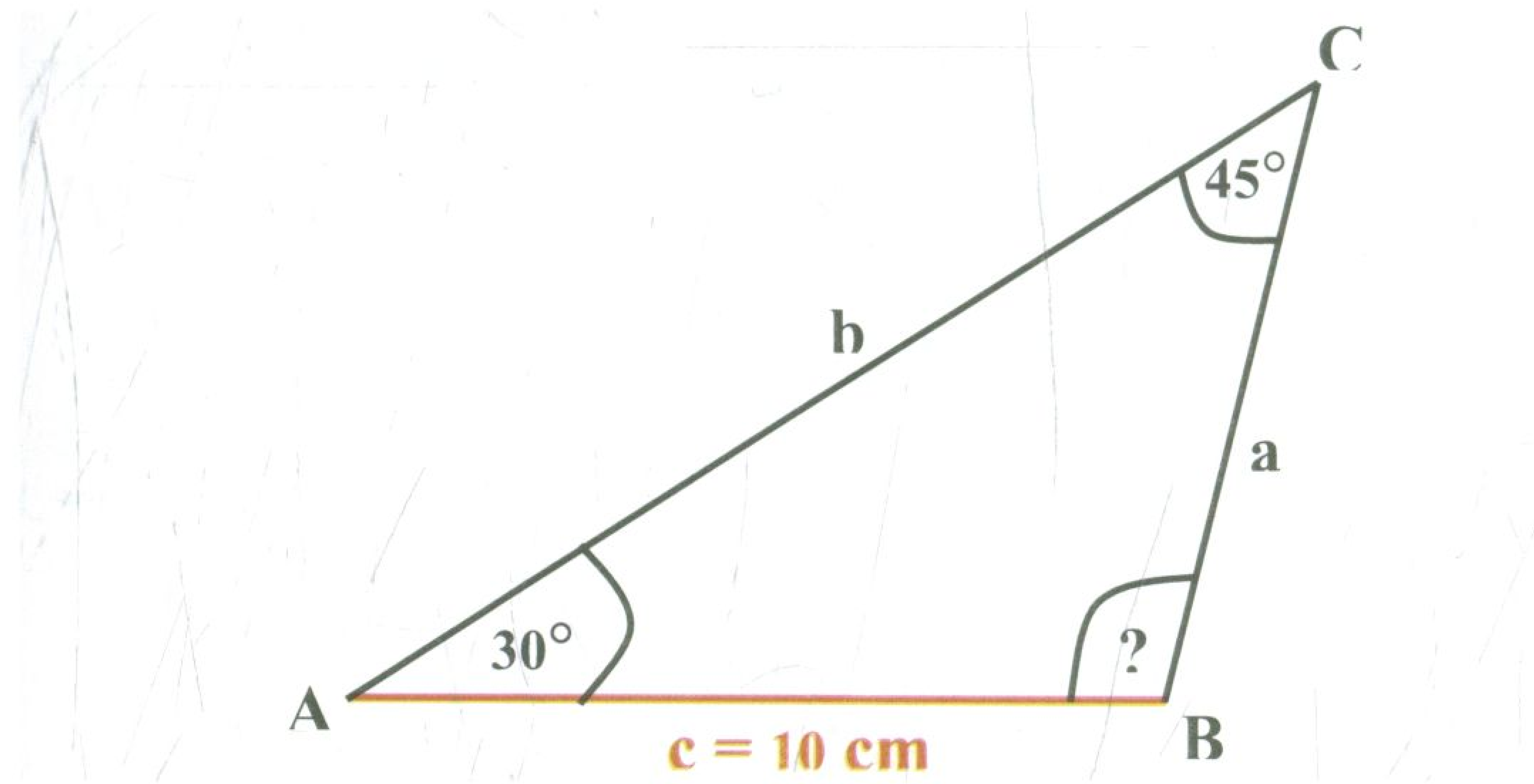
$$\Rightarrow \frac{20}{0.63} = \frac{b}{0.99} = \frac{c}{0.70}$$

$$\Rightarrow b = 31.4\,cm \quad and \quad c = 22.2\,cm$$

مثال (٧): في المثلث ABC، قيــاس زاويــة A تساوي $30°$، كما أن قياس زاوية C تساوي $45°$، وطول الضلع c يساوي $10\ cm$. أوجد طولا الضلعين a , b.

الحل

نرسم المثلث التالي لتوضيح الحل:



حيث إن مجموع زوايا المثلث تساوي $180°$، وبالتالي فإن:

$$\angle B = 180° - (30° + 45°) = 105°$$

ومن ثم فإن:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

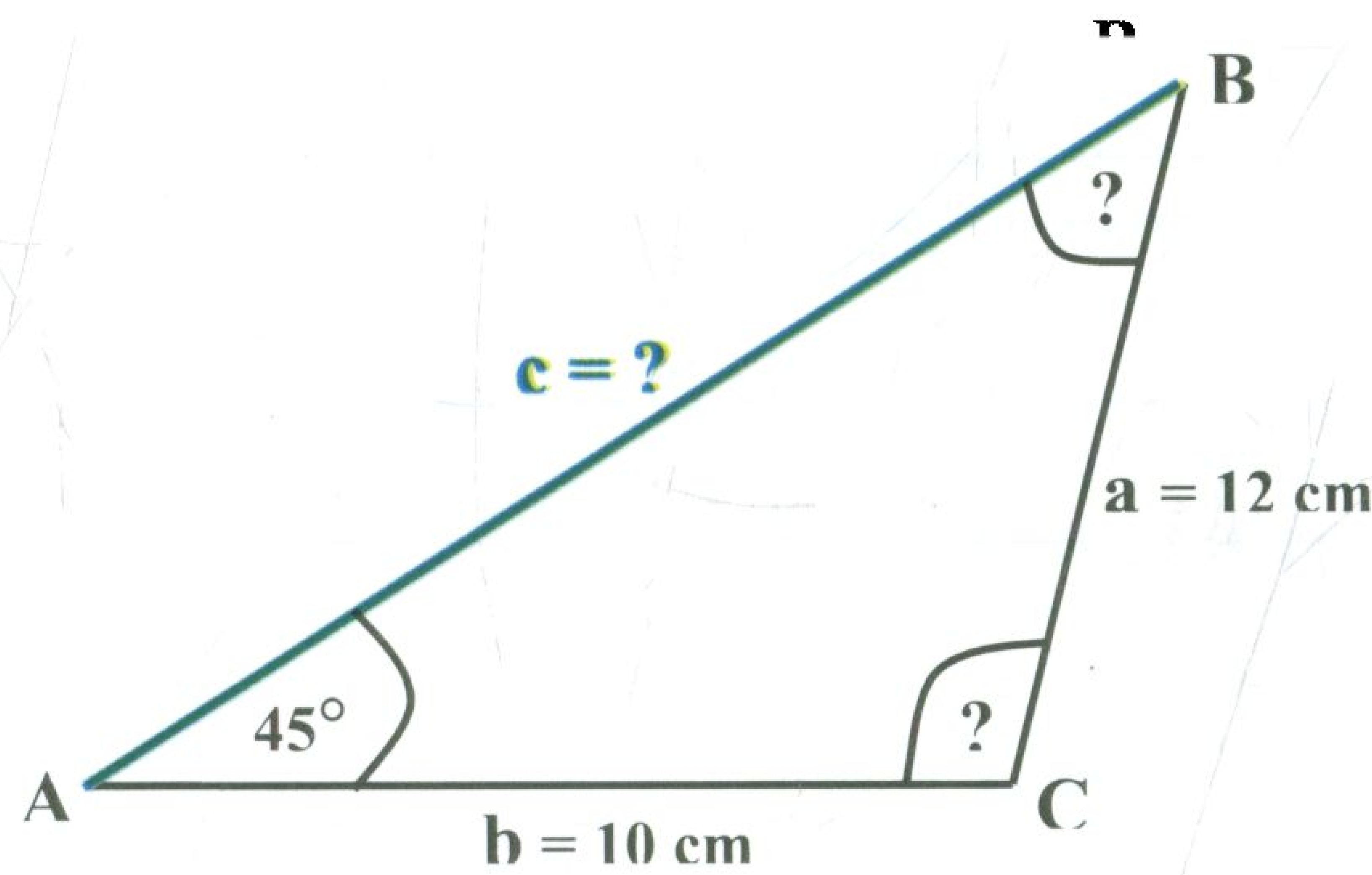
$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0.5} = \frac{b}{0.97} = \frac{10}{0.71} \Rightarrow a = 7.04\ cm \quad and \quad b = 13.66\ cm$$

مثال (٨): في المثلث ABC، تكون قياس الزاوية A هو $45°$، كما أن طولا الضلعين a , b يساوي $10\ cm$, $12\ cm$. أوجد طول الضلع c، وأوجد أيضاً قياس الزاويتين B , C.

الحل

نرسم المثلث التالي لتوضيح الحل:



من تعريف قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \ \sin B = 0.59 \quad \Rightarrow \quad \angle\, B = 36^\circ\, 9'\, 25''$$

حيث إن مجموع زوايا المثلث تساوي $180°$، وبالتالي فإن:

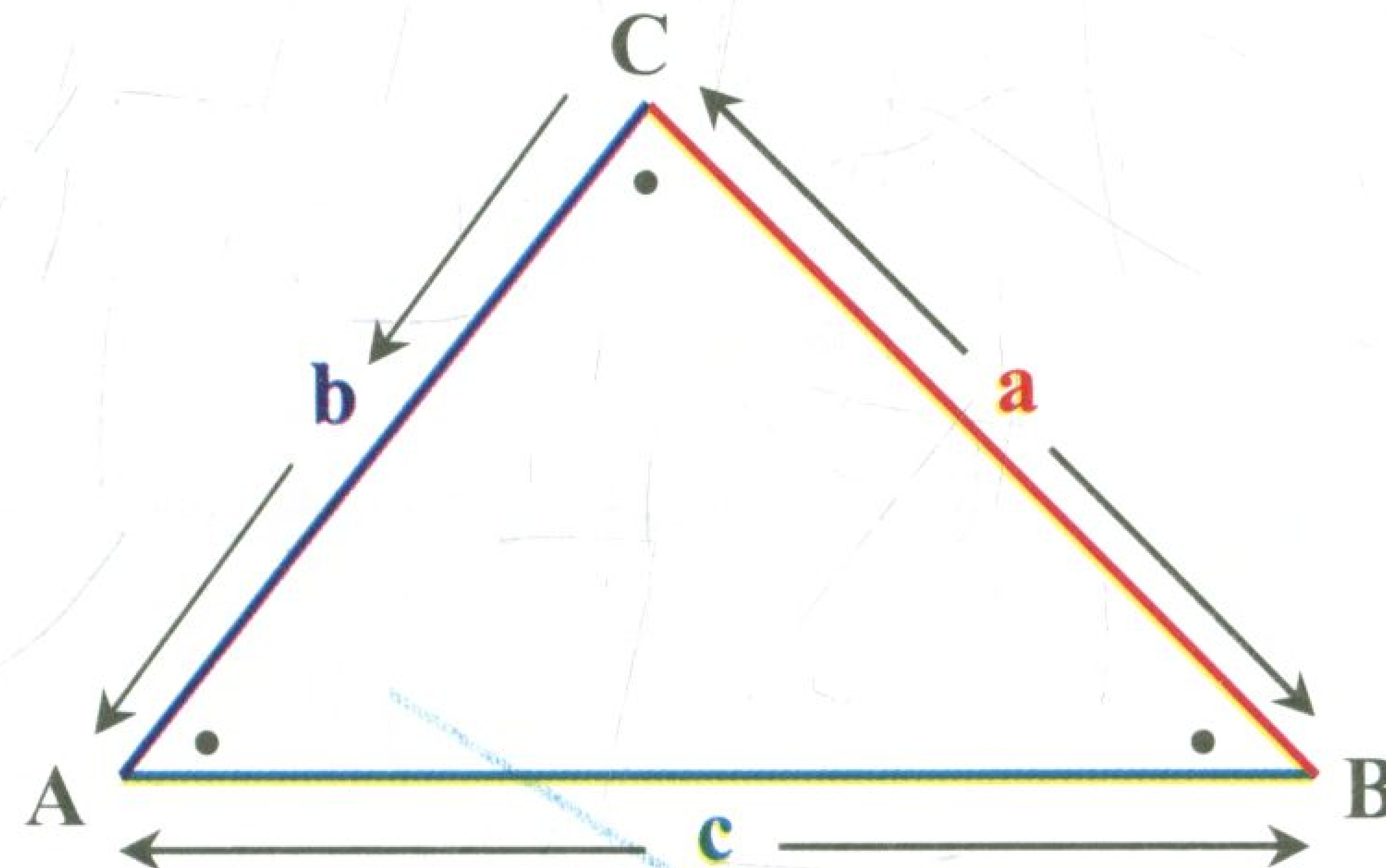
$$\angle\, C = 180° - (\,45° + 36°\, 9'25''\,) = 98°\, 50'\, 35''$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 98^\circ\, 50'\ 35''} \quad \Rightarrow \quad c = 16.8\ cm$$

خامساً: قاعدة جيب التمام Cosine Rule

تستخدم هذه القاعدة لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث، إذا عُلِمَ طولا ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما. وأيضاً إذا عُلِمَ أطوال أضلاعه الثلاثة. وقاعدة (قانون) جيب التمام يمكن كتابتها على إحدى الصور الواردة لاحقاً. برسم المثلث ABC الآتي:



إذا كان المطلوب هو إيجاد طول الضلع a في المثلث ABC بمعلومية طولا الضلعين b , c، وبمعلومية أيضاً قيمة الزاوية المحصورة بينهما A، يكون القانون هو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

أما إذا كان المطلوب هو إيجاد قيمة الزاوية A بمعلومية أطوال الأضلاع الثلاثة a , b , c في المثلث، يكون القانون كالآتي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

بالمثل يمكن إيجاد طولا الضلعين b , c، والزاويتين B , C نستخدم القوانين الآتية:

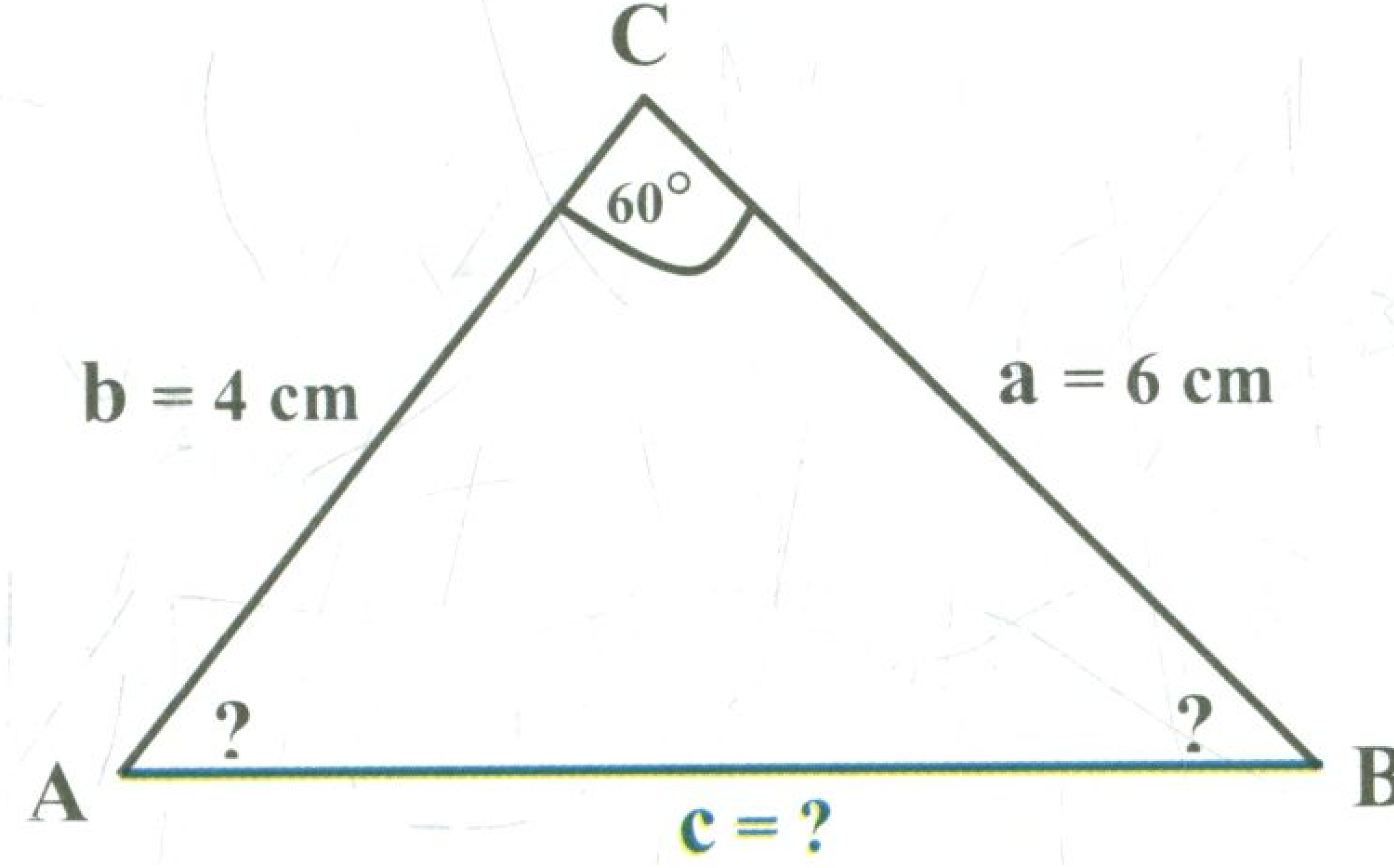
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad , \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال (٩): في المثلث ABC، قياس زاوية C تساوي $60°$، كما أن طولا الضلعين a , b يساوي $6\ cm , 4\ cm$ على الترتيب. أوجد طول الضلع c، وأوجد أيضاً قياس الزاويتين A , B.

الحل

برسم المثلث التالي:



باستخدام القاعدة:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C = 36 + 16 - 2\times 6\times 4\cos 60^\circ$$

$$= 52 - 48\times\frac{1}{2} = 52 - 24 = 28\ cm$$

$$\Rightarrow\ c \approx 5.3\ cm$$

لإيجاد قياس الزاوية A نستخدم القاعدة:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{16 + 28.09 - 36}{2\times 4\times 5.3} = \frac{8.9}{42.4} \approx 0.21$$

$$\Rightarrow\ \angle A \approx 77^\circ\ 52'\ 40''$$

وبالتالي فإن قياس الزاوية B هو:

$$\angle\ B = 180^\circ - \left(60^\circ + 77^\circ\ 52'\ 40''\right) = 180^\circ - 137^\circ\ 52'\ 40'$$

$$\approx 42^\circ\ 7'\ 20''$$

مثال (١٠): في المثلث ABC، نجد أنه إذا كانت أطوال أضلاعه الثلاثة a , b , c هي $6\ cm , 8\ cm , 10\ cm$ على الترتيب. أوجد قياس زوايا المثلث الثلاثة A , B , C.

الحل

لإيجاد قياس الزاوية A نستخدم القاعدة:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 100 - 36}{2 \times 8 \times 10} = \frac{128}{160} = 0.8$$

$$\Rightarrow \quad \angle A \approx 36^\circ\ 52'\ 12''$$

كما أن قياس الزاوية B هو:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36 + 100 - 64}{2 \times 6 \times 10} = \frac{72}{120} = 0.6$$

$$\Rightarrow \quad \angle B = 53^\circ\ 7'\ 49''$$

وأيضاً قياس الزاوية C هو:

$$\angle C = 180^\circ - \left(36^\circ\ 52'\ 12'' + 53^\circ\ 7'\ 49''\right) = 180 - 90^\circ\ 00'\ 01''$$

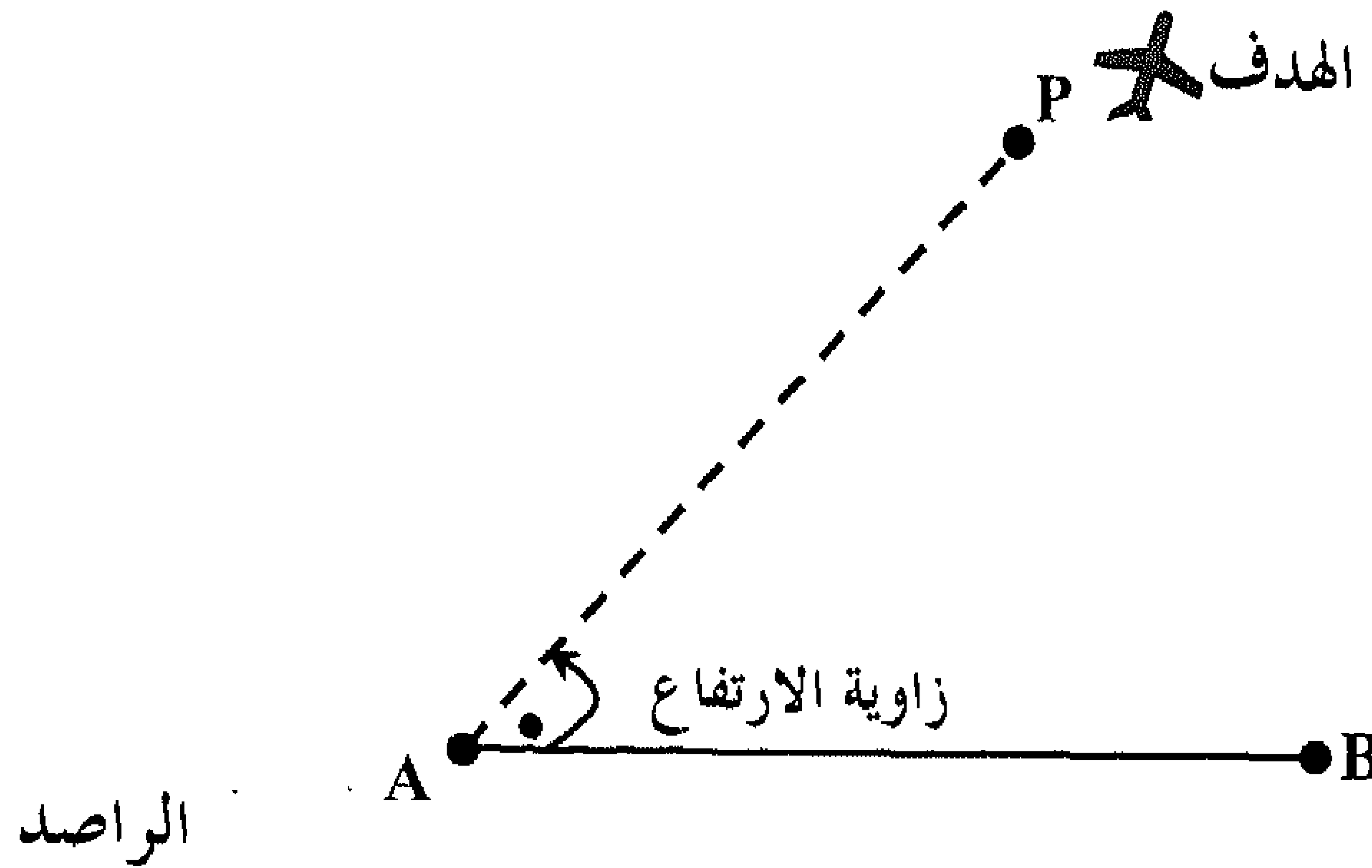
$$\approx 89^\circ\ 59'\ 59''$$

سادساً: تطبيقات عملية على حساب المثلثات

حساب المثلثات يمتلك العديد من التطبيقات العملية، التي لا غِنَى عنها لأي طالب عسكري في حياته العملية العسكرية، وأيضاً تدريباته اليومية. ومن أهم هذه التطبيقات زوايا الارتفاع والانخفاض، التي سنتناولها تفصيلياً كما يلي:

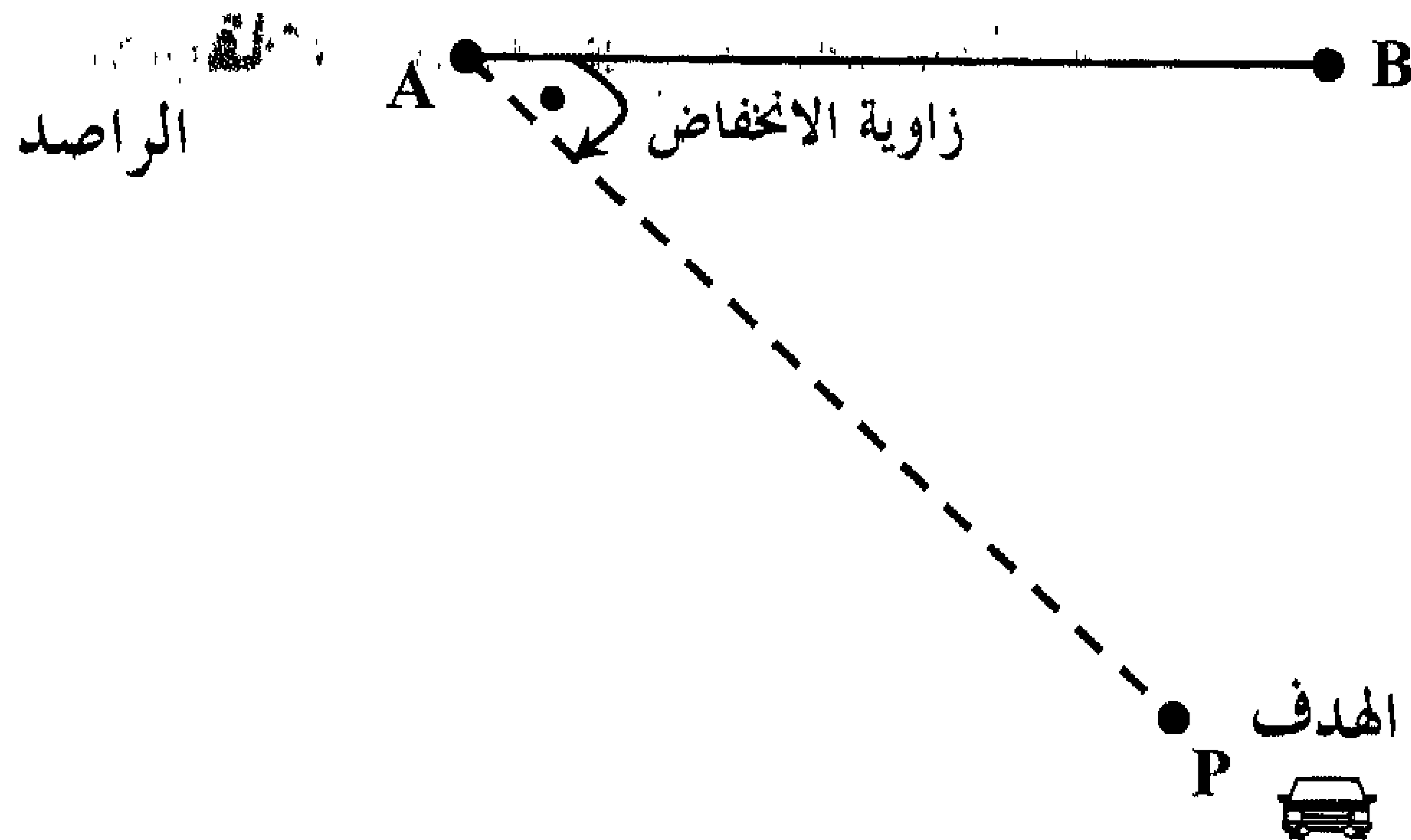
٦/١- زاوية الارتفاع Angle of Elevation

نفـرض وجود راصد عند نقطة A يرصد جسم أعلى مستوى النظر عند نقطـة P، فإن الزاوية المحصورة بين خط مستوى النظر الأفقي والخط الواصل بـين عـين الراصد والجسم المرصود، تسمى زاوية الارتفاع للجسم المرصود. كمـا يوضـحها الشكل التالي:

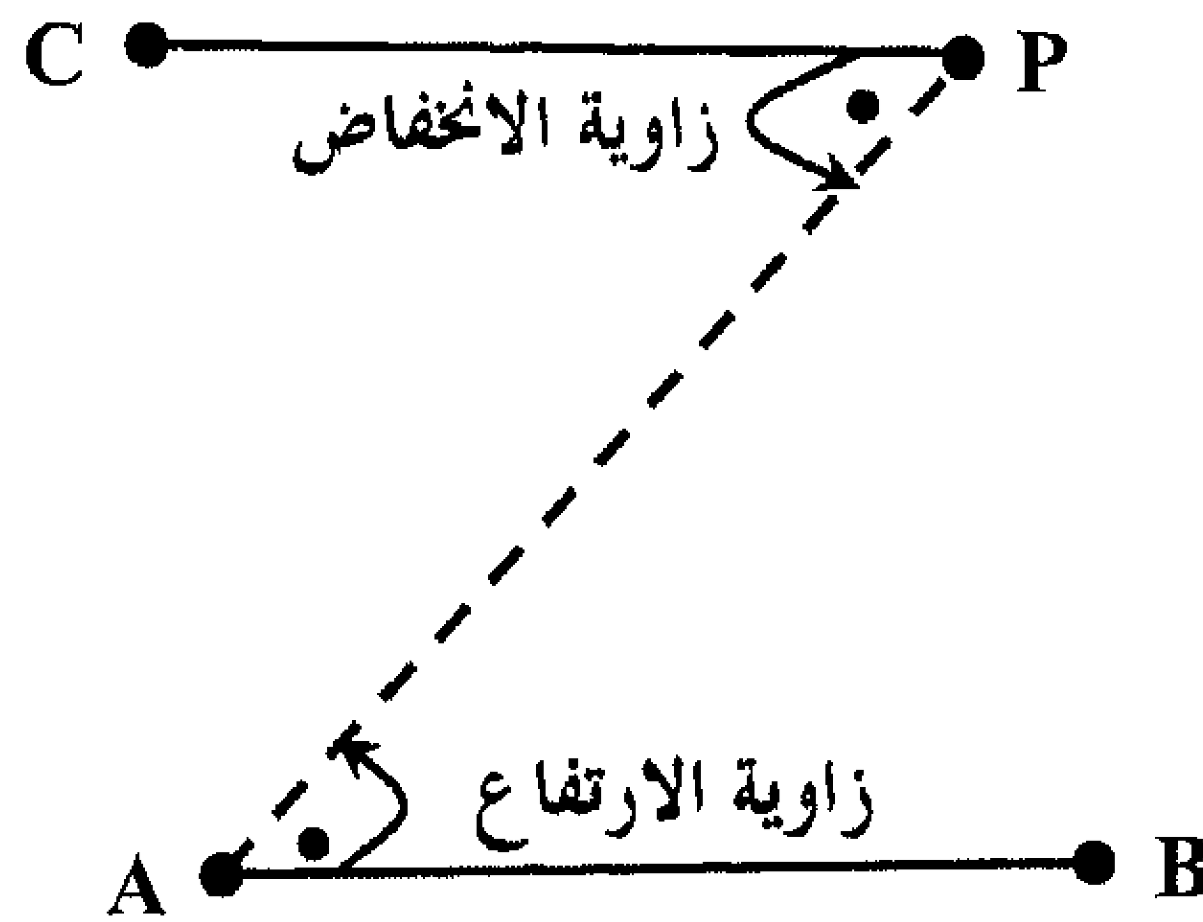


٦/٢- زاوية الانخفاض Angle of Depression

نفـرض وجود راصد عند نقطة A يرصد جسم أدنى مستوى النظر عند نقطـة P، فإن الزاوية المحصورة بين خط مستوى النظر الأفقي والخط الواصل بـين عـين الراصد والجسم المرصود، تسمى زاوية الانخفاض للجسم المرصود. كما يوضـحها الشكل التالي:



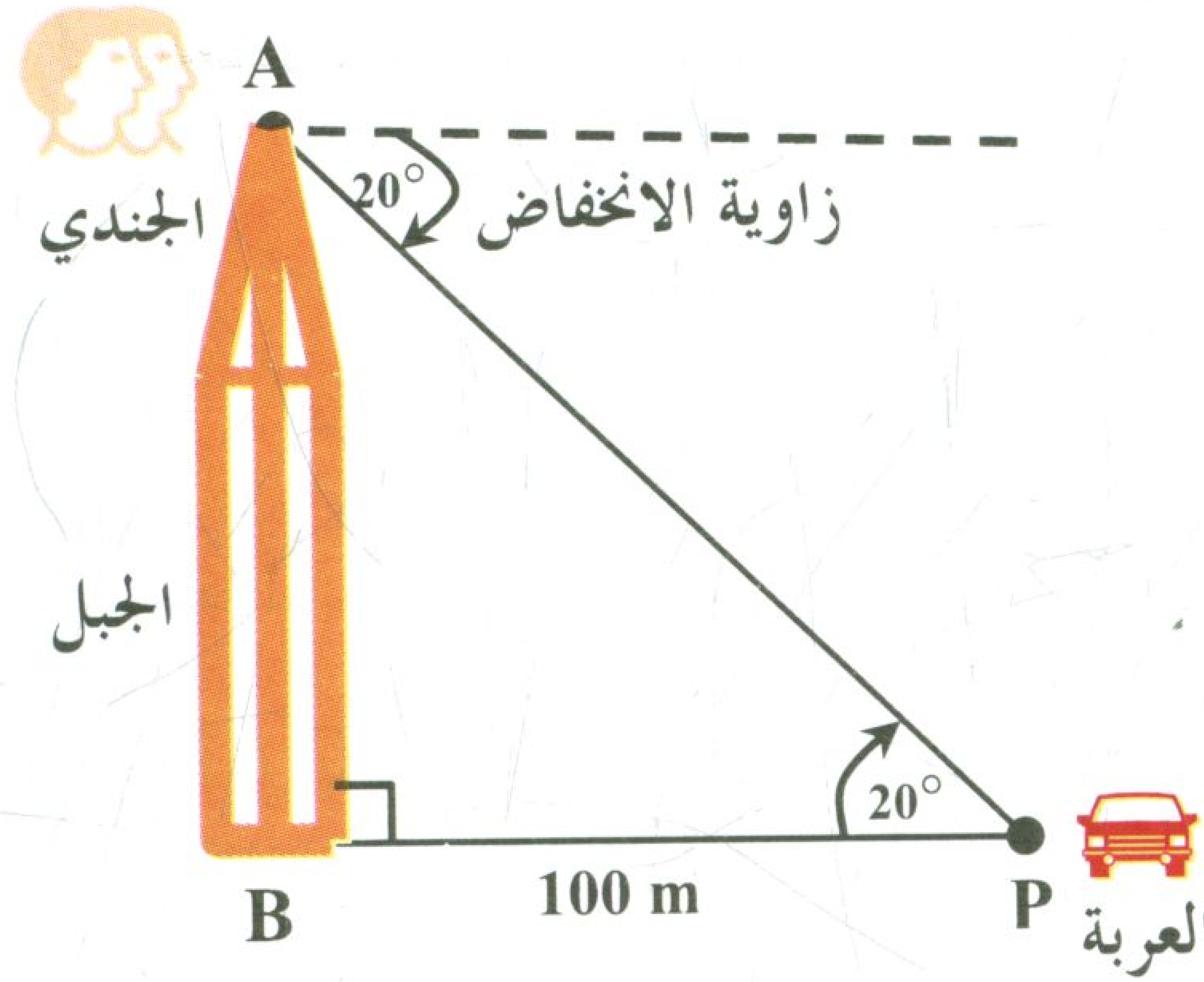
من تعريف زاويتي الارتفاع والانخفاض الموضحة بالرسمين السابقين نجد أن:
قياس زاوية ارتفاع النقطة P بالنسبة للنقطة A يساوي قياس زاوية انخفاض النقطة A بالنسبة للنقطة P بالتبادل. كما يوضحها الشكل التالي:



مثال (١١): جندي يقف على قمة جبل، رصد عربة مصفحة واقفة على الطريق تبعد عن قاعدة الجبل مسافة $100\ m$، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها تساوي 20°. أوجد ارتفاع الجبل. علماً بأن العربة وقاعدة الجبل على خط أفقي واحد.

الحل

من معطيات المثال يمكن تمثيل التطبيق بمثلث قائم الزاوية كالآتي:



من الرسم نجد أن:

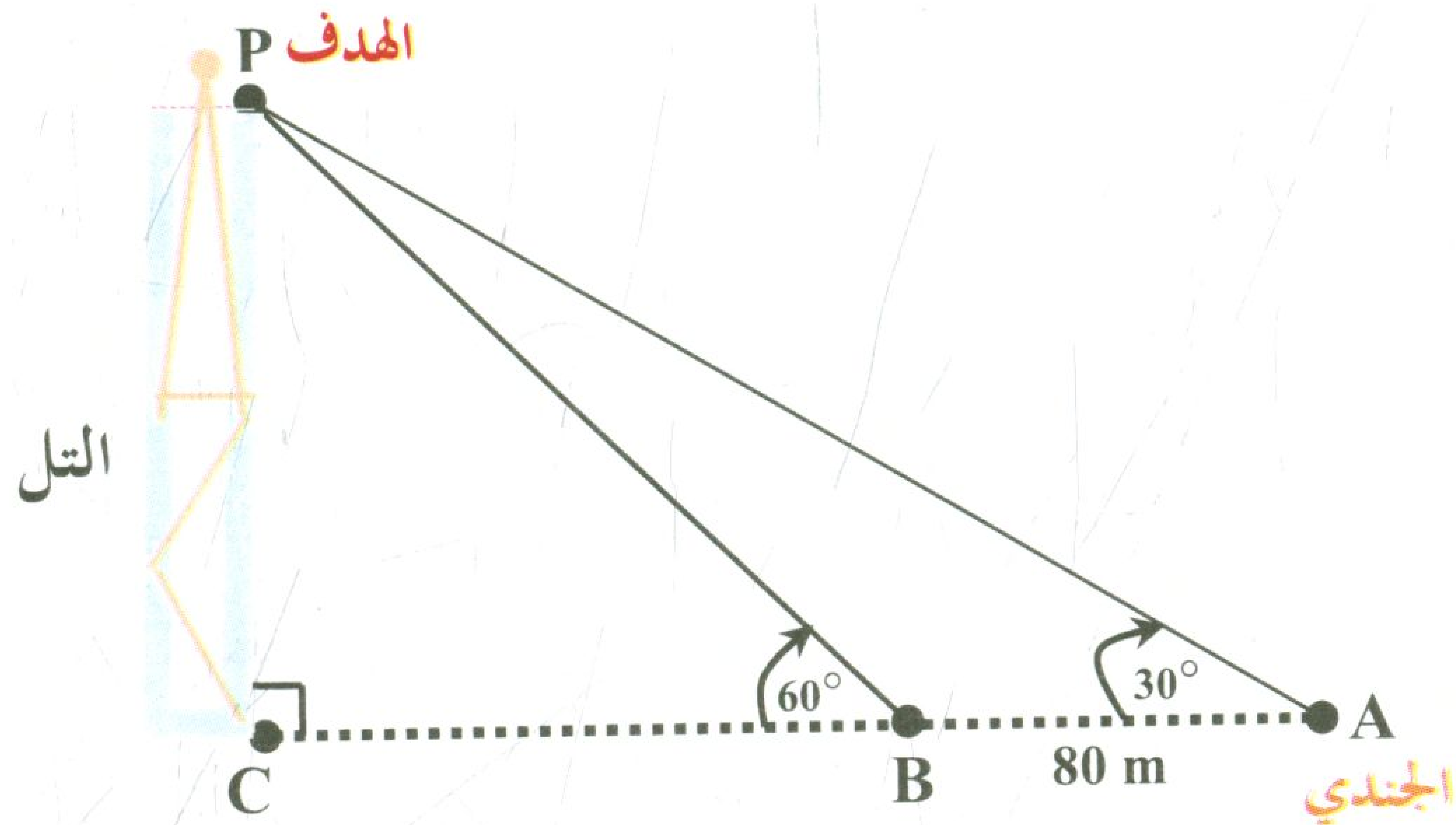
$$\tan 20^\circ = \frac{AB}{100} \Rightarrow AB = 100 \times \tan 20^\circ \approx 36.40\ m$$

وبالتالي فإن ارتفاع الجبل يساوي *36.40* متر تقريباً.

مثال (١٢): رصد جندي هدف يقف على قمة تل من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاعه هو $30°$، ثم سار مسافة مقدارها $80\ m$ نحو قاعدة التل، ورصد زاوية ارتفاع الهدف مرة أخرى فوجد أن قياس زاوية ارتفاعه هو $60°$. أوجد ارتفاع التل.

الحل

من معطيات المثال يمكن تمثيل التطبيق بمثلث قائم الزاوية كالآتي:



من الرسم نجد أن:

$$\tan 30^\circ = \frac{PC}{CA} = \frac{PC}{CB+80} \quad \Rightarrow \quad CB + 80 = \frac{PC}{0.5773502692} \qquad (1)$$

كما أن:

$$\tan 60^\circ = \frac{PC}{CB} \quad \Rightarrow \quad CB = \frac{PC}{1.732050808} \qquad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على:

$$80 = \frac{PC}{0.5773502692} - \frac{PC}{1.732050808} = PC(1.732 - 0.577)$$

$$\Rightarrow \quad PC = \frac{80}{1.155} \approx 69.3\ m$$

وبالتالي فإن ارتفاع التل يساوي 69.3 متر تقريباً.

حل آخر

من خواص المثلث، الزاوية CBP خارجة عن المثلث ABP، وبالتالي فإنها تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها. ومن ثم فإن قياس الزاوية APB يساوي 30°. أي أن المثلث ABP متساوي الساقين فيه $AB = BP = 80\ m$.

باستخدام قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{BP}{\sin 90} = \frac{CP}{\sin 60} \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{1} = \frac{CP}{0.8660254038}$$

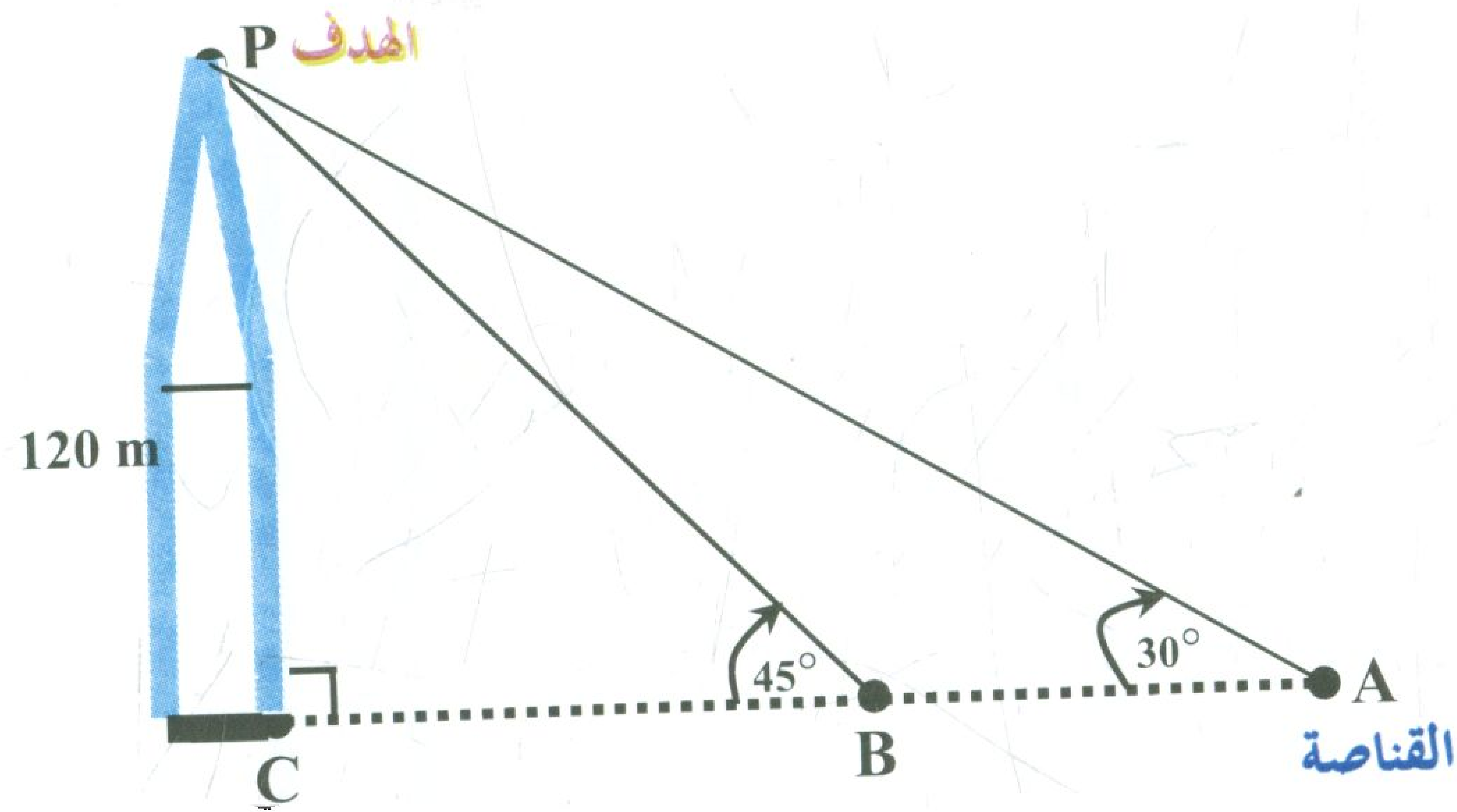
$$\Rightarrow \quad CP \approx 69.3\ m$$

ومن ثم فإن ارتفاع التل يساوي 69.3 متر تقريباً.

مثال (١٣): رصد قناصة يركب في سفينة حربية متحركة هدفاً أعلى قمة جبل ارتفاعه $120\ m$، فإذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة الجبل عند لحظة معينة هو 45°، ثم أصبح قياس زاوية الارتفاع بعد 4 دقائق من الحركة عكس البرج هو 30°. احسب السرعة المنتظمة للسفينة الحربية.

الحل

من معطيات المثال يمكن تمثيل التطبيق بمثلث قائم الزاوية كالآتي:



حيث إن المثلث PCB قائم الزاوية في C، كما أن قياس زاوية PBC يساوي $45°$، وبالتالي فإن قياس الزاوية CPB يساوي $45°$، أي أن المثلث PCB متساوي الساقين، ومن ثم فإن طول الضلع CB يساوي $120\ m$. أيضاً من الرسم نجد أن:

$$\tan 30^\circ = \frac{PC}{CA} = \frac{120}{120 + BA} \quad \Rightarrow \quad BA + 120 = \frac{120}{0.5773502692}$$

$$\Rightarrow \quad BA = 207.85 - 120 \approx 87.85\ m$$

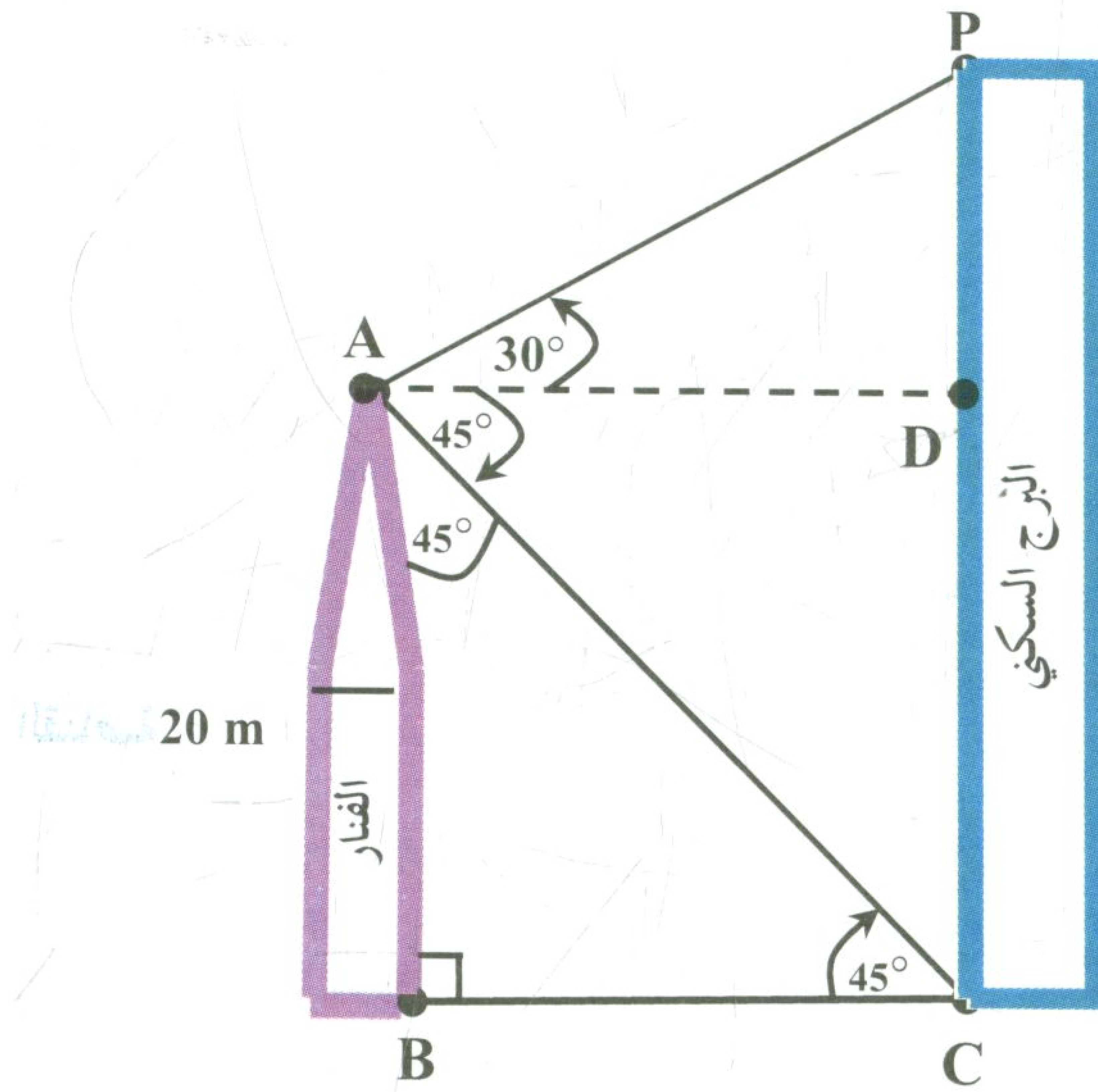
وحيث إن السرعة المنتظمة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذي قطعت فيه}}$. أي أن:

$$\text{السرعة المنتظمة} = v = \frac{87.85}{4} = 21.96\ m / min$$

مثال (١٤): من قمة فنار ارتفاعه $20\ m$ وجَد مهندس أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج سكني $30°$، وأن قياس زاوية انخفاض قاعدته $45°$. أوجد المسافة بين قاعدتي الفنار والبرج علماً بأنهما في مستوى أفقي واحد. ثم أوجد ارتفاع البرج السكني.

الحل

من معطيات المثال يمكن تمثيل التطبيق بمثلث قائم الزاوية كالآتي:



حيث إن المثلث ABC قائم الزاوية في B، كما أن قياس الزاوية BAC يساوي $45°$. ومن ثم فإن المثلث ABC متساوي الساقين، وبالتالي فإن طول الضلع $BC = AD = DC$ يساوي $20\ m$. كما أن المثلث ADP قائم الزاوية في D، وبالتالي فإن قياس الزاوية P يساوي $60°$. أيضاً من الرسم نجد أن:

$$\frac{PD}{\sin 30^\circ} = \frac{AD}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{PD}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 60^\circ}$$

$$PD = \frac{20}{\sin 60^\circ} \times \sin 30^\circ \approx 11.55\ m$$

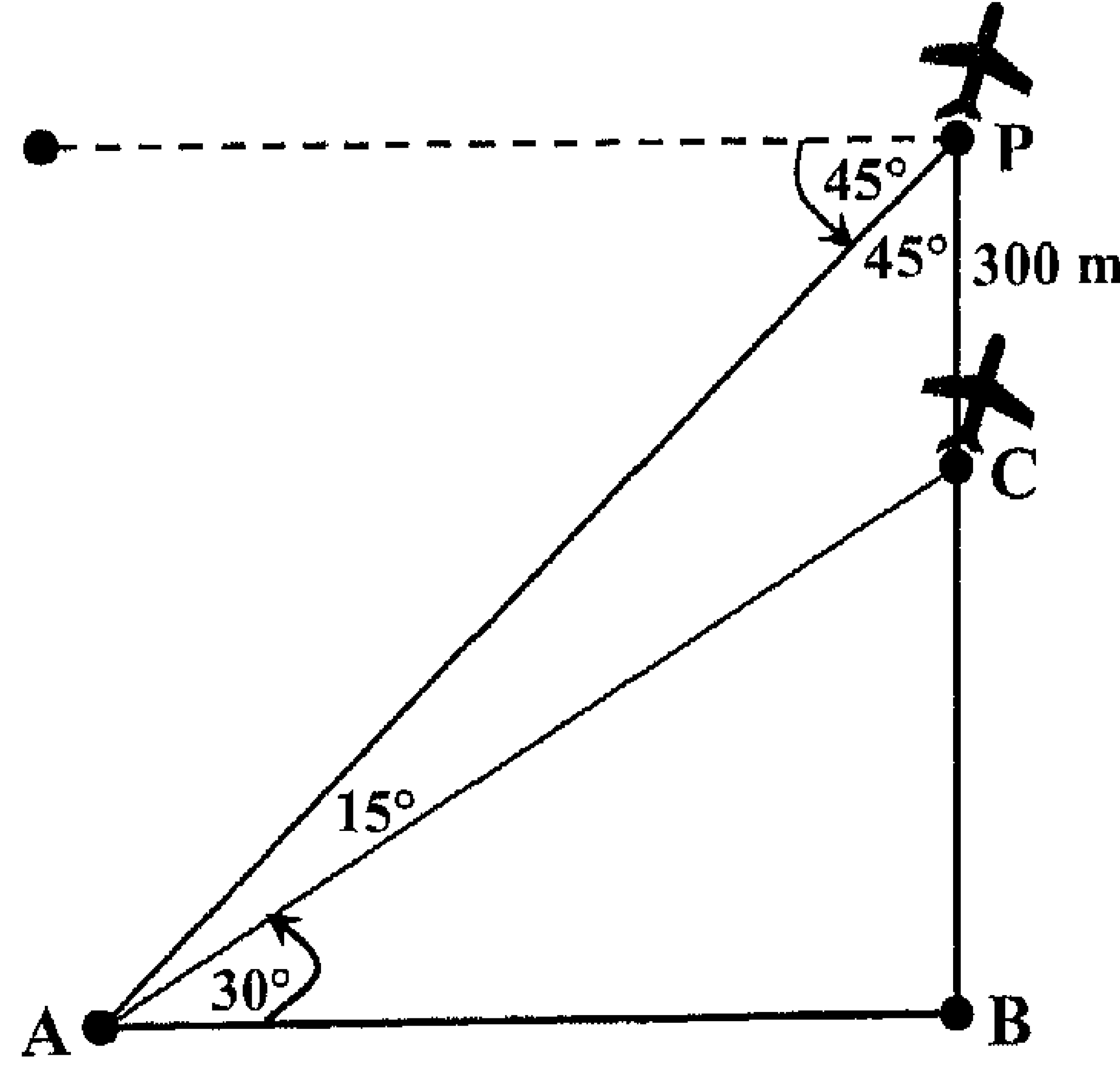
وبالتالي فإن طول البرج السكني يساوي:

$$PC = 20 + 11.55 \approx 31.55\ m$$

مثال (١٥): رصد طيار أحد المواقع الحربية فوجد أن قياس زاوية انخفاضه هو $45°$، ثم هبط الطيار رأسياً إلى أسفل مسافة قدرها $300\ m$. وفي هذا الموقع الحربي تنبه أحد القناصة فرصد زاوية ارتفاع الطائرة فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها $30°$. أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة رصد القناصة لها.

الحل

من معطيات المثال يمكن تمثيل التطبيق بالرسم التالي:



القناصة

باستخدام قاعدة الجيب في المثلث ACP نجد أن:

$$\frac{PC}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{300}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$$

$$AC = \frac{300}{\sin 15^\circ} \times \sin 45^\circ \approx 819.62\ m$$

كما أنه يمكن استخدام قاعدة الجيب في المثلث ABC نحصل على:

$$\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{819.62}{\sin 90^\circ}$$

$$BC = \frac{819.62}{\sin 90^\circ} \times \sin 30^\circ \approx 409.81\ m$$

وبالتالي فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة رصد القناصة لها يساوي:

$$BP = BC + CP = 300 + 409.81 \approx 709.81\ m$$

تمارين

١ – المثلث ABC قائم الزاوية في B، فيه $AC = 13\ cm\ ,\ BC = 12\ cm$، أوجد قيمة:

$i)\ \sin A \times \cos C + \cos A \times \sin C$

$ii)\ \cos A \times \cos C + \sin A \times \sin C$

$iii)\ \sqrt{\sec^2 A + \csc^2 A}$

$iv)\ \tan C + \cot C$

٢ – إذا كان $15 \sec x - 17 = 0$ حيث x زاوية حادة موجبة. أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية x.

٣ – المثلث ABC قائم الزاوية في B، فيه $AB = 30\ cm\ ,\ \sin C = 15/17$ ، أوجد قيمة $AC\ ,\ BC\ ,\ \sec A\ ,\ \cot A$.

٤ – إذا كان $29 \cos x - 20 = 0\ ,\ 0 < x < \pi/2$ ، أوجد قيمة $3 \csc x - 7 \cot x$.

٥ – إذا كان $5 \tan^2 x = 4$ حيث x زاوية حادة موجبة. أوجد قيمة:

$$\frac{\sec^2 x - \cos^2 x}{\csc^2 x - \sin^2 x}$$

٦ – إذا كان $A\ ,\ C$ قياسي زاويتين حادتين موجبتين، وكان $\tan A = \frac{3}{4}\ ,\ \sin C = \frac{12}{13}$.

أوجد قيمة:

$$\frac{\tan C + \sec C}{2 \tan A + 4 \sec A}$$

٧ – إذا كان $A\ ,\ B$ قياسي زاويتين حادتين موجبتين، وكان:

$$5 \tan A - 12 = 0\ \ ,\ \ 8 \sin B \sec B = 15$$

أوجد قيمة كل الدوال المثلثية لكل من الزاويتين $A\ ,\ B$. ثم أوجد أيضاً:

$$\frac{\tan A \tan B}{8 \sec B - 5 \sec A}$$

٨ – إذا كان $\pi/2 < x < \pi$ ، $\sin x = \dfrac{39}{70}$ ، أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلاً من الدوال الآتية:

$\cos x \ , \ \sec x \ , \ \tan x \ , \ \cot x$

٩ – من قمة برج مراقبة رصد جندي قارب حربي يتحرك نحو البرج بسرعة *100* متر لكل دقيقة، فوجد أن قياس زاوية انخفاض القارب هي *30°*، وبعد ثلاث دقائق وجَد أن قياس زاوية الانخفاض هي *60°*. أوجد ارتفاع البرج.

١٠ – من قمة برج مراقبة قيست زاوية انخفاض سفينة حربية فوجد أن قياسها *45°*، فإذا كانت السفينة تبعد عن قاعدة البرج مسافة *300 m*. أوجد ارتفاع البرج.

١١ – رصد جندي راكب في سفينة حربية تتحرك في البحر الأحمر مبتعدة عن صخرة في جزيرة ارتفاعها *80 m*، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع هدف على قمة الصخرة في لحظة معينة هو *60°*، ثم أصبح قياسها بعد *6* دقائق هو *45°*. احسب السرعة المنتظمة للسفينة.

١٢ – برج مراقبة ارتفاعه *20 m*، قيست زاويتي انخفاض دبابتين حربيتين تسيران على الأرض وفي جهة واحدة من البرج فكان قياسهما من القمة هو *45° , 20°*. أوجد المسافة بين الدبابتين. علماً بأن الدبابتين وقاعدة البرج جميعهم يقع على استقامة واحدة.

١٣ – رصد طيار هدفاً ثابتاً على الأرض من طائرة تهبط رأسياً، فوجد قياس زاوية انخفاضه *45°*، وبعد هبوط الطائرة *200 m* وُجِد أن قياس زاوية انخفاض نفس الهدف هي *30°*. أوجد ارتفاع الطائرة عن الأرض لحظة الرصد الثاني.

١٤ – برج ارتفاعه *100 m* رصد قناصة من قمته زاويتا انخفاض دبابتين في وقت واحد وفي جهتين متضادتين من قاعدة البرج فوجد قياسهما *60° , 45°*. أوجد البعد بين الدبابتين. علماً بأن الدبابتين في مستوى أفقي واحد مع قاعدة البرج.

١٥ – سفينة بحرية حربية تقع بين قاعدتي برج رصد ارتفاعه *40 m* وصخرة ارتفاعها *18 m*، رصد جندي قياس زاوية ارتفاع قمة البرج فوجد أنها *60°*، كما أنه رصد زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أنها *45°*. أوجد:

أ – البعد بين قاعدتي البرج والصخرة.

ب – البعد بين قمتي البرج والصخرة.

١٦ – سفينة حربية تتحرك في الماء في خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة 500 متر لكل دقيقة، وعند لحظة معينة رصد قناصة من السفينة هدف أعلى قمة الصخرة فوجد أن قياس زاوية ارتفاعه هو $30°$، وبعد ثلاث دقائق ومن نفس السفينة تم رصد قياس زاوية ارتفاع الهدف مرة أخرى، فوجد أن قياسه هو $60°$.
أحسب ارتفاع الصخرة.

الفصل الثامن

مبادئ حساب التفاضل

ELEMENTARY OF CALCULUS

مقدمة Introduction

علم التفاضل وخاصة المشتقة اكْتُشِفَت لأول مرة من خلال العالم الرياضي شرف الدين الطوسي عام (610 هـ)، وكان سبب اكتشاف هذا العلم هي وجود بعض مشاكل العلوم الفيزيائية والهندسية التي قابلت علماء الرياضيات، منها على سبيل المثال لا الحصر:

- ♦ إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند نقطة معينة (x_0 , y_0).
- ♦ إيجاد السرعة والعجلة (التسارع) لجسيم متحرك مهما كانت حركته.

وقدم العالم الرياضي الشهير إسحاق نيوتن Newton (1727 - 1643) الإنجليزي الأصل صياغة هامة لمشكلة سرعة الجسيم وعجلته في صورتهما العامة. ثم تطور هذا العلم تطوراً هائلاً حتى أصبح يسيطر على جميع العلوم التطبيقية – النظرية منها والعملية – وتطبيقاتها الفيزيائية. كما تناول هذا العلم بعد نيوتن بالبحث والدراسة العديد من العلماء أمثال العالم الألماني ليبنز Leibntiz (1716 - 1646)، والعالم الفرنسي كوشي Cauchy (1857 - 1789)، وغيرهما الكثير.

الهدف الأساسي هنا هو إيجاد المشتقة الأولى والثانية لبعض الدوال الأساسية والمثلثية بجميع أنواعها والقواعد العامة عليها، وأيضاً التطبيقات العملية عليها.

أولاً: الاشتقاق The Derivation

نفرض أن الدالة $y=f(x)$ متصلة في الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$، وأن x متغير ينتمي إلى هذه الفترة. فإذا حدث تغير في x مقداره Δx، يتبع ذلك تغير في الدالة $f(x)$ مقداره $f(x+\Delta x)$ (حيث Δ حرف من الأبجدية اليونانية يُقْرَأ دلتا)، فإن المشتقة الأولى إن وجدت للدالة $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير x والتي يرمز لها بأحد الرموز y' أو $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{df(x)}{dx}$، تعرف كالآتي:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وتُعبِّر المشتقة عن ميل المماس لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند أي نقطة $(x_1\ ,\ y_1)$. ومفهوم النهاية سبق للطالب دراسته في مراحل التعليم العام، ولكن وجب التنويه عنه في هذا الجزء من المقرر لأهميته القصوى في حساب التفاضل.

١/١- قواعد الاشتقاق The Derivation Rules

نعلم أن استخدام تعريف النهاية لإيجاد مشتقة الدالة $y=f(x)$ قد يستغرق بعض الوقت والجهد وذلك لكثرة القوانين والقواعد التي يمكن استخدامها، ولتسهيل إيجاد مشتقة دالة نلجأ لبعض قواعد الاشتقاق التي توفر الأسلوب السهل والأمثل وتقلل الوقت للحصول عليها. وفي ما يلي بعضاً من هذه القواعد التي استنتجت من قانون الاشتقاق الأساسي (٨ – ٢):

١/١/١- مشتقة الدالة الثابتة Constant Function Derivative

إذا كانت $f(x)=c$ دالة حيث c مقدار ثابت، فإن:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\,c}{d\,x} = 0 \quad , \quad \forall\ x$$

٢/١/١- مشتقة دالة القوة Power Function Derivative

أ – إذا كانت $f(x)=c\,x^n\ \ ,\ n\in R$ دالة حيث c مقدار ثابت، فإن:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x) = c\,n\,x^{n-1} \quad , \; \forall\, x$$

ب – إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عند x، فإن $y = [f(x)]^n$ أيضاً قابلة للاشتقاق، ويكون:

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x} = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$$

١/١/٣– مشتقة المجموع (الفرق) Sum (Difference) Derivative

إذا كانت $y = c_1\, f_1(x) \pm c_2\, f_2(x) \pm \cdots \pm c_n\, f_n(x)$ ، فإن:

$$\frac{d\,y}{dx} = y' = c_1\, f_1'(x) \pm c_2\, f_2'(x) \pm \cdots \pm c_n\, f_n'(x)$$

حيث $c_1 , c_2 , \cdots , c_n$ تمثل ثوابت، كما أن $f_1(x), f_2(x), \cdots , f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x.

مثال (١): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = 4\,x^5 - 5\,x^2 + 5\,x - 1$$

الحل

باستخدام قواعد المجموع والفرق، ودالة القوة، ومشتقة الثابت نجد أن:

$$f'(x) = 20\,x^4 - 10\,x + 5$$

مثال (٢): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = \frac{4}{x^5} - 5\,\sqrt[3]{x^2} + 6\,\sqrt[n]{x^m} - 1$$

الحل

يمكن تحويل الدالة $f(x)$ إلى الصيغة التالية:

$$f(x) = 4\,x^{-5} - 5\,x^{2/3} + 6\,x^{m/n} - 1$$

باستخدام قواعد المجموع والفرق، ودالة القوة، ومشتقة الثابت نجد أن:

$$f'(x) = -20\,x^{-6} - \frac{10}{3}\,x^{-1/3} + \frac{6\,m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}$$

مثال (٣): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^5$$

الحل

بتطبيق قاعدة دالة القوة نجد أن:

$$f'(x)=5\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^4\times\left(3x^2-8x+3\right)$$

مثال (٤): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^5}$$

الحل

يمكن تحويل الدالة $f(x)$ إلى الصيغة:

$$f(x)=\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^{5/3}$$

بتطبيق قاعدة دالة القوة نجد أن:

$$f'(x)=\frac{5}{3}\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^{2/3}\times\left(3x^2-8x+3\right)$$

١/١/٤- مشتقة حاصل الضرب Product Derivative

إذا كانت $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، وكـــان $y=f_1(x)\times f_2(x)$ ، فإن مشتقة حاصل ضرب دالتين تعرف كالآتي:

$$\frac{dy}{dx}=y'=f_1(x)\times f_2'(x)+f_2(x)\times f_1'(x)$$

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانيـــة + الثانيـــة × مـــشتقة الأولى.

مثال (٥): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=\left(2x^3+3\right)\left(5x^2-2\right)$$

الحل

باستخدام قاعدة حاصل الضرب نجد أن:

$$f'(x) = \left(2x^3 + 3\right)\left(10x\right) + \left(5x^2 - 2\right)\left(6x^2\right)$$

$$= 10x^4 + 30x + 30x^4 - 12x^2 = 40x^4 - 12x^2 + 30x$$

١/١/٥- مشتقة خارج القسمة Quotient Derivative

إذا كانت $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق وكــان $y = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ، فــإن مشتقة خارج قسمة دالتين تعرف كالآتي:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{f_2(x) \times f_1'(x) - f_1(x) \times f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}$$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين = $\dfrac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال (٦): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{5x^2 - 2}$$

الحل

باستخدام قاعدة خارج القسمة نجد أن:

$$f'(x) = \frac{\left(5x^2 - 2\right)\left(6x^2\right) - \left(2x^3 + 3\right)\left(10x\right)}{\left(5x^2 - 2\right)^2}$$

$$= \frac{30x^4 - 12x^2 - 20x^4 - 30x}{\left(5x^2 - 2\right)^2} = \frac{10x^4 - 12x^2 - 30x}{\left(5x^2 - 2\right)^2}$$

مثال (٧): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{\left(5x^2 - 2\right)}$$

الحل

باستخدام قاعدة خارج القسمة وحاصل الضرب نجد أن:

$$f'(x)=\frac{(5x^2-2)[(x-3)+(x+2)]-(x-3)(x+2)(10x)}{(5x^2-2)^2}$$

$$=\frac{(5x^2-2)\times 2x-10x^3+10x^2+60x}{(5x^2-2)^2}$$

$$=\frac{10x^3-4x-10x^3+10x^2+60x}{(5x^2-2)^2}=\frac{10x^2+56x}{(5x^2-2)^2}$$

١/١/٦- مشتقة الدوال المثلثية Trigonometric Functions Derivative

في الفصل السابع تم دراسة الدوال المثلثية، وفي هذا الجزء من الفصل نهتم بدراسة مشتقات الدوال المثلثية كتعريف فقط بدون الخوض في تفصيلات إثبات هذه المشتقات، كما يلي:

أ- مشتقة دالة الجيب *Sine Function Derivative*

إذا كانت $y=\sin x$ ، فإن:

$$y'=\cos x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y=\sin(ax\pm b)$ فإن:

$$y'=a\cos(ax\pm b)$$

مثال (٨): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y=x^2\sin(3x-4)$$

الحل

باستخدام قاعدة حاصل الضرب ومشتقة دالة الجيب نجد أن:

$$f'(x)=x^2\cos(3x-4)\times 3+2x\sin(3x-4)$$

$$=3x^2\cos(3x-4)+2x\sin(3x-4)$$

ب- مشتقة دالة جيب التمام **Cosine Function Derivative**

إذا كانت $y = cos\, x$ ، فإن:

$$y' = -sin\, x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y = cos(a\,x \pm b)$ فإن:

$$y' = -a\, sin(a\,x \pm b)$$

مثال (٩): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = x^4\, cos(x^3 - 4)$$

الحل

باستخدام قاعدة حاصل الضرب وقاعدة دالة جيب التمام نجد أن:

$$f'(x) = -x^4\, sin(x^3 - 4) \times 3\,x^2 + 4\,x^3\, cos(x^3 - 4)$$

$$= -3\,x^6\, sin(x^3 - 4) + 4\,x^3\, cos(x^3 - 4)$$

مثال (١٠): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = sin\,2\,x\; cos\,3\,x$$

الحل

باستخدام قاعدة حاصل الضرب وقاعدة دالة الجيب وجيب التمام نجد أن:

$$f'(x) = -3\, sin\,2\,x \times sin\,3\,x + 2\, cos\,3\,x \times cos\,2\,x$$

ج- مشتقة دالة الظل **Tangent Function Derivative**

إذا كانت $y = tan\, x$ ، فإن:

$$y' = sec^2\, x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y = tan(a\,x \pm b)$ فإن:

$$y' = a\, sec^2\,(a\,x \pm b)$$

مثال (١١): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = tan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

الحل

باستخدام قاعدة خارج القسمة وقاعدة دالة الظل نجد أن:

$$f'(x) = sec^2\left(\frac{x-1}{x}\right) \times \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} sex^2\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

د- مشتقة دالة ظل التمام Cotangent Function Derivative

إذا كانت $y = cot\, x$ ، فإن:

$$y' = -csc^2\, x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y = cot(a\,x \pm b)$ فإن:

$$y' = -a\, csc^2\,(a\,x \pm b)$$

مثال (١٢): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = cot\, \sqrt{x^3 + 5}$$

الحل

يمكن تحويل الدالة $f(x)$ إلى الصيغة التالية:

$$y = cot\, \left(x^3 + 5\right)^{1/2}$$

باستخدام قاعدة دالة ظل التمام نجد أن:

$$f'(x) = -csc^2\left(x^3 + 5\right)^{1/2} \times \frac{1}{2}\left(x^3 + 5\right)^{-1/2} \times 3\,x^2$$

$$= \frac{-3\,x^3}{2\sqrt{x^3 + 5}} \times csc^2\,\sqrt{x^3 + 5}$$

هـ- مشتقة دالة القاطع Secant Function Derivative

إذا كانت $y = sec\, x$ ، فإن:

$$y' = sec\, x\; tan\, x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y = sec(a\,x \pm b)$ فإن:

$$y' = a\, sec(a\,x \pm b)\; tan(a\,x \pm b)$$

مثال (١٣): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = sec^3\left(x^3 + x\right)$$

الحل

باستخدام قاعدة دالة قاطع الزاوية نجد أن:

$$f'(x) = 3\,sec^2\left(x^3 + x\right) \times sec\left(3x^3 + x\right) \times tan\left(3x^3 + x\right) \times \left(3x^2 + 1\right)$$

$$= 3\left(3x^2 + 1\right) \times sec^3\left(x^3 + x\right) \times tan\left(x^3 + x\right)$$

و- مشتقة دالة قاطع التمام Cosecant Function Derivative

إذا كانت $y = csc\,x$ ، فإن:

$$y' = -csc\,x\;cot\,x$$

♦ كما أنه إذا كانت $y = csc\left(a\,x \pm b\right)$ فإن:

$$y' = -a\,csc\left(a\,x \pm b\right)\,cot\left(a\,x \pm b\right)$$

مثال (١٤): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = csc\left(2x^2 + 1\right) \times tan\,x$$

الحل

باستخدام قاعدة دالة قاطع تمام الزاوية وحاصل ضرب دالتين نجد أن:

$$f'(x) = csc\left(2x^2 + 1\right).sec^2\,x - 4x\,tan\,x\,.csc\left(2x^2 + 1\right).cot\left(2x^2 + 1\right)$$

١/٢- جدول قواعد مشتقات بعض الدوال

بعد الدراسة المستفيضة لقواعد مشتقات الدوال الجبرية والدوال المثلثية يمكن تلخيص هذه القواعد في جدول كالتالي:

مسلسل	الدالة	المشتقة
1	$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$
2	$y = [f(u)]^n$	$\frac{dy}{dx} = n[f(u)]^{n-1} f'(u)\frac{du}{dx}$
3	$y = \sin u$	$\frac{dy}{dx} = \cos u.\frac{du}{dx}$
4	$y = \cos u$	$\frac{dy}{dx} = -\sin u.\frac{du}{dx}$
5	$y = \tan u$	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u.\frac{du}{dx}$
6	$y = \cot u$	$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 u.\frac{du}{dx}$
7	$y = \sec u$	$\frac{dy}{dx} = \sec u.\tan u.\frac{du}{dx}$
8	$y = \csc u$	$\frac{dy}{dx} = -\csc u.\cot u.\frac{du}{dx}$

١/٣- المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

نفرض أن $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x، كما نفرض أن المشتقة الأولى $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ دالة أيضاً قابلة للاشتقاق، فإن المشتقة الثانية للدالة $y = f(x)$ تكون موجودة، ويرمز لها بالرمز $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$. كما

يمكن الحصول على المشتقة الثالثة والرابعة . . . وهكذا حتى نصل إلى المشتقة النونية. ويرمز لهذه المشتقات بالرموز الآتية:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{d x^3} \;,\; y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{d x^4} \;,\ldots,\; y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{d x^n}$$

مثال (١٥): أوجد المشتقة الثانية للدالة المذكورة في مثال (١)

الحل

حيث إن المشتقة الأولى للدالة المذكورة في مثال (١) هي:

$$f'(x) = 20x^4 - 10x + 5$$

وبالتالي فإن المشتقة الثانية هي:

$$f''(x) = 80x^3 - 10 = 10(8x^3 - 1)$$

مثال (١٦): أوجد المشتقة الثانية للدالة:

$$y = \sin 2x + \cos x^3$$

الحل

المشتقة الأولى للدالة المذكورة هي:

$$y' = 2\cos 2x - 3x^2 \sin x^3$$

كما أن المشتقة الثانية هي:

$$y'' = -4\sin 2x - 9x^4 \cos x^3 - 6x \sin x^3$$

١/٤ - الاشتقاق الضمني Implicit Differentiation

في البنود السابقة من هذا الفصل درسنا مشتقة الدالة $y = f(x)$، حيث أن y تعتبر دالة صريحة في x، أي أننا استطعنا وضع y في طرف وحدها والمتغير x مهما كانت درجته في الطرف الآخر. وفي هذه الحالة نقول أن الدالة $f(x)$ دالة صريحة.

أما إذا تعذر (أي استحال) فصل المتغير x عن المتغير y صراحة، أي لا يمكن التعبير عن المتغير y بدلالة المتغير x، ففي هذه الحالة نقول أن الدالة ضمنية. وفي بعض الحالات يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة.

مثال (١٧): أوجد المشتقة الأولى $d\,y/d\,x$ للدالة:

$$x\,y-5\,y-3\,x+2=0$$

الحل

هذه المعادلة تعتبر دالة ضمنية، وللحصول على $d\,y/d\,x$ نتبع الآتي:

$$x\frac{d\,y}{d\,x}+y-5\frac{d\,y}{d\,x}-3=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\,y}{d\,x}(x-5)+y-3=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\,y}{d\,x}=\frac{3-y}{x-5}$$

يمكن تحويل المعادلة الضمنية $x\,y-5\,y-3\,x+2=0$ إلى معادلة صريحة كالآتي:

$$x\,y-5\,y-3\,x+2=0\ \Rightarrow\ (x-5)\,y=3x-2$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{3\,x-2}{x-5}$$

وبالتالي فإن:

$$y=\frac{3\,x-2}{x-5}$$

والمشتقة الأولى لهذه الدالة هي نفس مشتقة الدالة الضمنية. أي أن:

$$y'=\frac{3-y}{x-5}$$

مثال (١٨): أوجد المشتقة الأولى $d\,y/d\,x$ للدالة:

$$x^2+y^2=9$$

الحل

هذه المعادلة تعتبر دالة ضمنية، وللحصول على $d\,y/d\,x$ نتبع الآتي:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

مثال (١٩): أوجد المشتقة الأولى dy/dx للدالة:

$$x^2 + 4xy - 3y^2 - 2x = 4$$

الحل

هذه المعادلة تعتبر دالة ضمنية، وللحصول على dy/dx نتبع الآتي:

$$2x + 4x\frac{dy}{dx} + 4y - 6y\frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow\ 2x + 4y - 2 + \frac{dy}{dx}(4x - 6y) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x - 4y}{4x - 6y} = \frac{1 - x - 2y}{2x - 3y}$$

مثال (٢٠): أوجد المشتقة الأولى dy/dx للدالة:

$$\sin 3y - \cos 2x = 0$$

الحل

هذه المعادلة تعتبر دالة ضمنية، وللحصول على dy/dx نتبع الآتي:

$$3\cos 3y\,\frac{dy}{dx} + 2\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2x}{3\cos 3y}$$

مثال (٢١): أوجد المشتقة الأولى dy/dx للدالتين:

$i)\ y^3 + 2x^2 y - 3xy^2 = 0$

$ii)\ x\cos y + y\sin 2x = 1$

الحل متروك للقارئ.

ثانياً: تطبيقات المشتقات Derivatives Applications

يوجد العديد من التطبيقات العملية على المشتقات بجميع أنواعها منها التطبيقات الهندسية والفيزيائية والمعدلات الزمنية وغيرها الكثير. ونعرض تفصيلياً هذه التطبيقات كما يلي:

٢/١ - تطبيقات هندسية Geometric Applications

درسنا في الفصل الرابع تطبيقات معادلات الدرجة الأولى والثانية، وفي هذا الجزء من الفصل نستخدم بعض مفردات الفصل الرابع كتطبيق هندسي على المشتقات، نوردها في ما يلي:

تطبيق (١): أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة:

$$y = x^3 - 6x^2 + 10$$

والتي يكون عندها خط التماس لهذا المنحنى أفقياً.

الحل

يكون خط التماس أفقياً، إذا كان ميل هذا الخط يساوي الصفر. أي عندما تكون المشتقة الأولى تساوي صفراً. وبالتالي فإن:

$$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad or \quad x = 4$$

بالتعويض عن قيمتي x في معادلة المنحنى، نجد أن:

$$at\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 10 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 10)\ ,$$

$$at\ x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 64 - 96 + 10 = -22 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (4, -22)$$

أي أن النقاط هي $(0,10)$ ، $(4,-22)$.

تطبيق (٢): أثبت أن خط التماس لمنحنى الدالة:

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

عند النقطة $x = 2$ الواقعة عليه يكون رأسياً.

الحل

حيث إن النقطة $x = 2$ تقع على منحنى الدالة المعطى، إذن فهي تحقق معادلته.
بالتعويض في المعادلة عن قيمة $x = 2$ يمكن إيجاد قيمة y المناظرة كالآتي:

$$(2)^2 + 2y + y^2 = 3 \;\Rightarrow\; y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\; (y+1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -1$$

وبالتالي فإن النقطة $(x\,,\,y) = (2\,,-1)$.

ولإيجاد الميل، نوجد المشتقة الأولى لمعادلة منحنى الدالة عند النقطة $(2\,,-1)$ كما يلي:

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow\; (2y + x)\frac{dy}{dx} + (2x + y) = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2x}{2y + x}$$

ومن ثم فإن الميل هو:

$$m(2\,,-1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\,,-1)} = -\frac{-1+4}{2-2} = -\frac{3}{0} = \text{كمية غير معرفة}$$

وبالتالي فإن خط التماس لمنحنى الدالة يكون رأسياً.

تطبيق (٣): أوجد ميل خط التماس لمنحنى الدالة:

$$x^2 y - y^3 = 8$$

عند النقطة $(-3\,,\,1)$ الواقعة عليه. ثم أوجد معادلة خط التماس، وأيضاً أوجد معادلة العمودي عليه عند النقطة المذكورة.

الحل

لإيجاد الميل، نوجد المشتقة الأولى لمعادلة منحنى الدالة عند النقطة $(-3\,,\,1)$ كما يلي:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^2 - 3y^2\right)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 - 3y^2}$$

ومن ثم فإن الميل هو:

$$m(-3\ ,1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-3\ ,1)} = \frac{6}{6} = 1$$

وبالتالي فإن معادلة خط التماس لمنحنى الدالة بمعلومية الميل ونقطة عليه هي:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = (1)(x+3)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = x + 3$$

$$\Rightarrow \quad y - x - 4 = 0$$

ومن المعلومات الواردة في الفصل الرابع أن الخطان المستقيمان يتعامدان إذا كان $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. وهذا يعني أن معادلة الخط المستقيم العمودي على خط التماس هي:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\left(x - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = (-1)(x+3)$$

$$\Rightarrow \quad y + x + 2 = 0$$

تطبيق (٤): أوجد معادلة الخط العمودي على منحنى الدالة:

$$x^2 + 3xy + y^2 = 5$$

عند النقطة $(1\ ,1)$ الواقعة عليه.

الحل

أولاً نوجد ميل خط التماس للمنحنى المعطى، وذلك بإيجاد المشتقة الأولى لمعادلة منحنى الدالة عند النقطة $(1\ ,\ 1)$ كما يلي:

$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\quad (3x+2y)\frac{dy}{dx}+(2x+3y)=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y}{3x+2y}$$

ومن ثم فإن الميل هو:

$$m(1\ ,1)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1\ ,1)}=-1$$

وبالتالي فإن معادلة الخط المستقيم العمودي على خط التماس هي:

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow\quad y-1=(+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow\quad y-x=0$$

٢/٢- تطبيقات فيزيائية Physics Applications

في هذا الجزء من الفصل يتم دراسة أهم التطبيقات الحياتية التي تفيد الرجل العسكري في جميع مجالاته، ألا وهي حركة الجسيمات في خطوط مستقيمة، مع إيجاد خصائص هذه الحركة من حيث المسافة المقطوعة distances، والسرعة velocities، والعجلة (التسارع) acceleration. فإذا رمزنا للمسافة (الموضع – البعد – الإزاحة) كدالة في الزمن لجسيم يتحرك في خط مستقيم بالرمز:

$$s = s(t) \quad , \quad t > 0$$

حيث t يمثل الزمن، كما أن s تمثل بعد الجسيم عن أي نقطة ثابتة من مسارها. فإن المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن تمثل سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنيـــة، ويرمز لها بالرمز:

$$v = v(t) = \frac{d\,s(t)}{d\,t} = s'(t)$$

- ♦ إذا كانت $v > 0$ ، هذا يعني أن الجسيم يتحرك في اتجاه تزايد المسافة s.
- ♦ وإذا كانت $v < 0$ ، فهذا يعني أن الجسيم يتحرك في اتجاه تناقص المسافة s.
- ♦ أما إذا كانت $v = 0$ ، فهذا يعني أن الجسيم في وضع السكون الآني.

كما أن المشتقة الثانية للمسافة (المشتقة الأولى للسرعة) بالنسبة للزمن تعبر عن العجلة (التسارع) عند أي لحظة زمنية. ويمكن التعبير عنها كما يلي:

$$a = a(t) = \frac{d^2\,s(t)}{d\,t^2} = s''(t) = \frac{d\,v(t)}{d\,t} = v'(t)$$

- ♦ إذا كانت $a > 0$ ، هذا يعني أن سرعة الجسيم v تكون تزايدية.
- ♦ وإذا كانت $a < 0$ ، فهذا يعني أن سرعة الجسيم v تكون تناقصية.
- ♦ إذا كانت a , v لهما نفس الإشارة، هذا يعني أن سرعة الجسيم تزايدية.
- ♦ أما إذا كانت a , v مختلفتان في الإشارة، فهذا يعنـــي أن ســـرعة الجـــسيم تناقصية.

ملاحظات

- ♦ السرعة الابتدائية لجسيم يتحرك في خط مستقيم عندما تكون $t = 0$.
- ♦ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عندما تكون $v = 0$.
- ♦ الزمن الذي يسكن عنده الجسيم لحظياً عندما تكون $v = 0$.
- ♦ الزمن الذي يعود الجسيم بعده إلى نقطة البداية عندما تكون $s = 0$.

تطبيق (٥): يتحـــرك جسيم في خط مستقيم أفقي بحيث يكون بعده عن نقطة ثابتة بالمتر بعد t ثانية هو:

$$s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$$

أوجد سرعة وتسارع الجسيم بعد ثانيتين.

الحل

باستخدام معادلة البعد السابقة، نجد أن السرعة هي:

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = \frac{3}{2}t^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad v_{t=2\,sec} = \frac{3}{2}\times(2)^2 - 2 = 6 - 2 = 4\,m\,/\,sec$$

كما أن التسارع هو:

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{3\times 2}{2}t = 3t$$

$$\Rightarrow \quad a_{t=2\,sec} = 3\times 2 = 6\ m\,/\,sec^2$$

تطبيق (٦): يسير جندي في خط مستقيم وفقاً للمعادلة:

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

حيث إن s هي المسافة بالمتر، t الزمن بالثانية. المطلوب:

أ – إيجاد المسافة s والعجلة a عندما تكون السرعة $v = 0$.

ب – إيجاد المسافة s والسرعة v عندما يكون التسارع $a = 0$.

ج – متى تكون المسافة s تزايدية؟

د – متى تكون السرعة v تزايدية؟

الحل

أ – لإيجاد المسافة s والتسارع a عندما تكون السرعة $v = 0$، نوجد أولاً السرعة ثم التسارع كما يلي:

$$\text{السرعة} = v = \frac{d\,s}{d\,t} = 3t^2 - 12t + 9$$

بوضع $v = 0$ نحصل على الزمن t كما يلي:

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3t-9)(t-1) = 0$$

$\Rightarrow \quad t = 1 sec \quad or \quad t = 3 sec$

التسارع $= a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 12$

بالتعويض عن الزمن t في المسافة s والتسارع a، نحصل على:

$s|_{t=1sec} = 1 - 6 + 9 + 4 = 8m \quad , \quad a|_{t=1sec} = 6 - 12 = -6 m/sec^2$

$s|_{t=3sec} = 27 - 54 + 27 + 4 = 4m \quad , \quad a|_{t=1sec} = 18 - 12 = 6 m/sec^2$

ب – لإيجاد المسافة s والسرعة v عندما يكون التسارع $a = 0$، نتبع ما يلي:

$\because$ التسارع $= a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad t = 2 \ sec$

بالتعويض عن الزمن t في المسافة s والسرعة v، نحصل على:

$s|_{t=2sec} = 8 - 24 + 18 + 4 = 6m \ ,$

$v|_{t=2sec} = 12 - 24 + 9 = -3 \ m/sec$

ج – تكون المسافة s تزايدية عندما تكون السرعة $v > 0$، أي عندما تكون:

$3t^2 - 12t + 9 > 0$

لإيجاد مجموعة حل الزمن، نستخدم طريقة التحليل التي اتبعناها في الفصل الخامس لنحصل على:

$t < 1 sec \quad or \quad t > 3 sec$

أي أن المسافة s تزايدية عندما تكون $t < 1 sec \quad or \quad t > 3 sec$.

د – تكون سرعة الجسيم v تكون تزايدية.إذا كانت $a > 0$، أي عندما تكون:

$6t - 12 > 0$

أي عندما يكون $t > 2 sec$.

تطبيق (٧): يسير جندي في خط مستقيم وفقاً للمعادلة:

$$s = t^3 - 9t^2 + 24t$$

حيث إن s هي المسافة بالمتر، t الزمن بالثانية.

أ – متى تكون المسافة s تزايدية ومتى تكون تناقصية؟

ب – متى تكون السرعة v تزايدية ومتى تكون تناقصية؟

الحل متروك للقارئ.

تطبيق (٨): قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية $96\ ft/sec$ وفقاً للمعادلة:

$$s = 96t - 16t^2$$

حيث أن s هي المسافة بالقدم من نقطة البداية، t الزمن بالثانية.

أ – أوجد السرعة والتسارع بعد أربع ثواني.

ب – أقصى ارتفاع يصله الجسيم.

ج – أوجد الزمن الذي يكون عنده ارتفاع الجسيم مساوياً $128\ ft$.

الحل

لإيجاد السرعة والتسارع نوجد المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية لدالة المسافة على الترتيب كما يلي:

$$\text{السرعة} = v = 96 - 32t\ ,$$

$$\text{التسارع} = a = -32\ ft/sec^2$$

أ – السرعة والتسارع بعد أربع ثواني هما:

$$v\big|_{t=4} = 96 - 32\times 4 = 96 - 128 = -32\ ft/sec\ ,$$

$$a\big|_{t=4} = -32\ ft/sec^2$$

وحيث إن $v < 0$، فهذا يعني أن الجسيم يهبط إلى أسفل بمعدل $32\ ft/sec$.

ب – يصل الجسيم إلى أقصى ارتفاع عندما تكون السرعة $v = 0$، أي أن:

$$96 - 32t = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 3\,sec$$

وبالتالي فإن أقصى ارتفاع يكون عندما تكون $t = 3\,sec$، أي أن:

$$\text{أقصى ارتفاع} = s\Big|_{t=3\,sec} = 96\times 3 - 16\times(3)^2 = 288 - 144 = 144\ ft$$

ج – لإيجاد الزمن الذي يكون عنده ارتفاع الجسيم مساوياً $128\ \ ft$، نعوض عن هـذه القيمة في معادلة المسافة كما يلي:

$$128 = 96t - 16t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (t-2)(t-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 2\,sec \quad or \quad t = 4\,sec$$

نلاحـظ أنـه في نهايـة الثانية الثانيـة من بدء الحركة يكون الجسيم على ارتفـاع $128\ \ ft$ وهو صاعد إلى أعلى، لأنه في هذه الحالة يكون $v > 0$. أما في نهاية الثانية الرابعة من بدء الحركة يكون الجسيم عند الارتفاع ذاته ولكن يكون هابطاً إلى أسـفل، لأنه في هذه الحالة يكون $v < 0$.

تمارين

١ – أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

$a)\ y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

$b)\ y=(x^3+x+1)(x^2-x+1)$

$c)\ y=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$d)\ y=\dfrac{1}{2x^2+3}$

$e)\ y=2x\sqrt{x}+4\sqrt{x-1}$

$f)\ y=\dfrac{x-1}{2x+3}$

$g)\ y=\dfrac{x+1}{(x-3)^2}$

$h)\ y=\dfrac{1}{(3x^2-5)^n}\ ,\ n\in N$

$i)\ f(x)=\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2+2}\right)^2\ ,\quad at\ x=1$

$j)\ y=\sqrt[3]{x^2+4x+6}\ ,\quad at\ x=3\ ,$

$k)\ y^3=x^3+x+6\ ,\quad at\ x=1$

$l)\ y=(x-2)^7\,(x+2)^7\,(3x^2+2)^5$

$m)\ y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

٢ – إذا كانت:

$$f(x)=x^3+6x^2-36x+4$$

أ – أوجد $f'(0)\,,\,f'(1)$

ب – أوجد قيم x التي تجعل $f'(x)=0$

٣ – إذا كانت:

$$y=a\sin nx+b\cos nx$$

أثبت أن $y''+n^2y=0$.

٤ – إذا كانت $y=\sec x$ أثبت أن:

$$y\,y''+(y')^2=y^2\left(3y^2-2\right).$$

٥ – أوجد المشتقة الأولى dy/dx للدوال الآتية:

$1)\ y=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\tan x$

$2)\ y=\sin 3x+\cos\frac{x}{5}+\tan\sqrt{x}$

$3)\ 2\cos^2(x+y)=5$

$4)\ \tan y=xy$

$5)\ y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

٦ – أثبت أن المشتقة الأولى للدالة $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تساوي صفر.

٧ – أوجد معادلة خط التماس للمنحنى الذي معادلته $y=\sin x$ عند $\pi/3$.

٨ – أوجد معادلة خط التماس للمنحنى الذي معادلته $y=\tan x$ عند $\pi/4$.

٩ – أوجد معادلة خط التماس ومعادلة العمودي للمنحنى الـذي معادلتـه $y=\tan x$ عند النقطة $(\pi/6\,,\,1)$.

١٠ – عنــد أي النقــاط على المنحــنى $x\,y = 12$ يكــون خط التماس موازياً للخط

$$3x + y = 0$$

١١ – أوجد النقاط الواقعة على المنحنى $y = 3x^3 - 11x + 5$ والتي يكون عنــدها خط التماس لهذا المنحنى:

أ – موازياً للخط المستقيم الذي معادلته $2x + y - 5 = 0$.

ب – عمودياً على الخط المستقيم الذي معادلته $x + 25y = 6$.

١٢ – أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة $y = x^3 - 3x^2$ والتي يكــون عنــدها ميل خط التماس للمنحنى يساوي صفر.

١٣ – إذا كانت المسافة التي تفصل دبابة حربية عن قاعدتها على مسارها المستقيم في اللحظة الزمنية t تعطى بالدالة التالية:

$$s = 3t^4 - 44t^3 + 144t$$

أوجد الزمن الذي تكون فيه حركة الدبابة إلى الوراء.

١٤– إذا كانت سرعة جندي يجري في خط مستقيم بعد t ثانية من بدء حركته هي:

$$v = t^2 - 3t + 2\ m/sec$$

أ – أوجد سرعة الجندي الابتدائية.

ب – متى يقف الجندي لحظياً، وما قيمة تسارعه حينئذٍ؟

١٥ – تتحرك عربة حربية في خط مستقيم حسب علاقة المسافة:

$$s = t^2(6 - t)$$

أوجد سرعة العربة الحربية عندما ينعدم تسارعها. حيث t يمثل الزمن بالثواني، كمــا أن s تمثل المسافة بالأمتار.

١٦ – قُذف جسيم رأسياً إلى أعلى حسب علاقة المسافة:

$$s = -16t^2 + 48t + 256$$

حيث t يمثل الزمن بالثواني، كما أن s تمثل المسافة بالأمتار.

أ – أوجد السرعة الابتدائية للجسيم.

ب – أوجد الزمن الذي يصل فيه الجسيم إلى أقصى ارتفاع.

ج – أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم.

د – متى يصدم الجسيم بسطح الأرض.

١٧ – يسير جندي في خط مستقيم وفقاً للمعادلة:

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t$$

حيث إن s هي المسافة بالمتر، t الزمن بالثانية.

أ – أوجد التسارع عند أي لحظة زمنية t. وما هو التسارع بعد خمس ثوانٍ؟

ب – متى تكون السرعة v تزايدية ومتى تكون تناقصية؟

١٨ – يتحرك قطار في خط مستقيم وفقاً للمعادلة:

$$s = t^4 - 4t^3 + 2$$

حيث إن s هي المسافة بالمتر، t الزمن بالثانية. أوجد الأزمنة التي يكون عندها التسارع مساوياً للصفر. ثم أوجد المسافة والسرعة عند تلك الأزمنة.

١٩ – إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم بعد t ثانية تعطى بالدالة التالية:

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 12$$

أ – أوجد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

ب – أوجد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

الفصل التاسع

مبادئ حساب التكامل

ELEMENTARY OF INTEGRATION

مقدمة Introduction

درسنا في الفصل الثامن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x في الفترة المفتوحة (a , b) ومشتقتها هي $f'(x)$ لتعطي دالة جديدة هي $F(x)$، وفي هذه الحالة تسمى $f(x)$ دالة أصلية أو التكامل غير المحدود للدالة $F(x)$. ومعنى ذلك أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق).

العالمان الرياضيان إسحاق نيوتن وليبنز قدما صياغة هامة لحساب التفاضل، ولكن إنجازهما الأكبر هو اكتشاف عملية التكامل برمزه الذي نتناوله حالياً. ولكن العالم الألماني ريمان (1866 – 1826) Riemann قدم التعريف الدقيق للتكامل المحدد معتمداً على نتائج العالم كوشي. كما تناول الكثير من علماء الرياضيات عملية التكامل بطرق مختلفة معتمدين على نتائج أقرانهم من العلماء السابقين.

في كثير من المواقف الرياضية العملية نحتاج إلى حساب العملية العكسية، كأن نرغب في معرفة سرعة الجسيم وموضعه بمعلومية تسارعه (عجلته) عند لحظة زمنية معينة، وهذا ما يعرف بعلم التكامل. ويهدف هذا الفصل إلى دراسة التكامل المحدود وغير المحدود لبعض الدوال الجبرية والمثلثية وخواصها. وأيضاً دراسة بعض التطبيقات العملية والفيزيائية.

أولاً: التكامل غير المحدود Indefinite Integral

من العرض نجد أن التكامـل غير المحـدود لأي دالة معروفة $y = f(x)$ ليس وحيداً. فإذا كانت $f(x) = x^2$ ، فإن مشتقتها هي $f'(x) = 2x = F(x)$. وأيضاً إذا كانت $f(x) = x^2 \pm c$ ، حيث c مقدار ثابت. فـإن $F(x) = f'(x) = 2x$ ، أي أن جميع الدوال المذكورة لها نفس المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجـة الأولـى، أي تمثل معادلة خط مستقيم، وهي $F(x) = 2x$. أي أن الدالة الأصلية للدالة $2x$ ليست وحيدة. وبالتالي فإن الدالة الأصلية للدالة $F(x) = 2x$ هي $f(x) = x^2 + c$ حيث c ثابت اختياري يسمى ثابت التكامل. وسوف نرمز للتكامل غير المحدود للدالة $F(x)$ بالرمز $\int F(x)dx$ للدلالة على أن المطلوب هو إجراء التكامل غير المحدود للدالـة $F(x)$ ، الرمز dx يعبر عن أن عملية التكامل المراد إجراؤها تكون بالنسبة للمتغير x فقط، وأي متغير آخر موجود يعامل معاملة الثابت. ويسمى التكامل في هذه الحالـة بالمشتقة العكسية Antiderivative or Primitive. أي أن:

$$\frac{d}{dx}\int F(x)dx = F(x)$$

١/١- طرق التكامل Integration Methods

لتسهيل عملية إجراء التكامل للدوال الجبرية والمثلثية، نلجأ لدراسة بعض طرق التكامل لتساعدنا على إجراء هذه العملية التي توفر كثيراً من الجهد والوقت بدلاً مـن إيجادها بطريقة المشتقة العكسية. وفي ما يلي بعضاً من هذه الطرق:

١/١/١- تكامل الدالة الثابتة Constant Function Integration

إذا كانت $f(x) = c$ دالة حيث c مقدار ثابت، فإن:

$$\int f(x)dx = \int c\,dx = cx + k$$

حيث k هو ثابت التكامل.

٢/١/١- تكامل دالة القوة Power Function Integration

أ - إذا كانت $f(x) = cx^n \ , \ n \in R$ دالة حيث c مقدار ثابت، فإن:

$$\int cx^n\,dx = c\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + k \ , \ n \neq 1$$

ب – إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عند x، فإن:

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \ , \ n \neq 1$$

١/١/٣– تكامل المجموع (الفرق) Sum (Difference) Integration

إذا كانت $y = c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm \cdots \pm c_n f_n(x)$ ، فإن:

$$\int [c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm \cdots \pm c_n f_n(x)]\, dx$$

$$= c_1 \int f_1(x)\, dx \pm c_2 \int f_2(x)\, dx \pm \cdots \pm c_n \int f_n(x)\, dx$$

حيث $c_1 , c_2 , \cdots , c_n$ تمثل ثوابت، كما أن $f_1(x), f_2(x), \cdots , f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل بالنسبة للمتغير x.

مثال (١): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = 20x^4 - 10x + 5$$

الحل

باستخدام قواعد المجموع والفرق، ودالة القوة، وتكامل الثابت نجد أن:

$$\int (20x^4 - 10x + 5)\, dx = \frac{20x^5}{5} - \frac{10x^2}{2} + 5x + c$$

$$= 4x^5 - 5x^2 + 5x + c$$

مثال (٢): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = -\frac{20}{x^6} - \frac{10}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \frac{6m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$$

الحل

باستخدام قواعد المجموع والفرق، ودالة القوة نجد أن:

$$\int \left(-20x^{-6} - \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{6m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \right) dx$$

$$= 4x^{-5} - 5x^{2/3} + 6x^{m/n} + c = \frac{4}{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[n]{x^m} + c$$

مثال (٣): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x)=5\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^4\times\left(3x^2-8x+3\right)$$

الحل

بتطبيق قاعدة دالة القوة نجد أن:

$$5\int\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^4\left(3x^2-8x+3\right)dx$$

$$=\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^5+c$$

مثال (٤): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^2}\ \left(3x^2-8x+3\right)$$

الحل

بتطبيق قاعدة دالة القوة نجد أن:

$$\frac{5}{3}\int\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^{2/3}\left(3x^2-8x+3\right)dx$$

$$=\sqrt[3]{\left(x^3-4x^2+3x-6\right)^5}+c$$

مثال (٥): أوجد تكامل الدالة:

$$\int\frac{(3x+2)(3x-2)}{x^2}dx$$

الحل

لإيجاد هذا التكامل نتبع ما يلي:

$$\int\frac{(3x+2)(3x-2)}{x^2}dx=\int\frac{9x^2-4}{x^2}dx=\int\left(9-4x^{-2}\right)dx$$

$$=9x+\frac{4}{x}+c$$

مثال (٦): أوجد تكامل الدول التالية:

$$a)\ \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$b)\ \int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}\, dx$$

$$c)\ \int \left(x^2 + 5\right)^2 dx$$

الحل متروك للقارئ.

١/١/٤- تكامل الدوال المثلثية Trigonometric Functions Derivative

في الفصل الثامن تم دراسة مشتقات الدوال المثلثية، وفي هذا الجزء من الفصل نهتم بدراسة تكامل هذه الدوال كتعريف فقط بدون إثبات هذه التكاملات كما يلي:

أ- تكامل دالة الجيب Sine Function Integration

إذا كانت $f(x) = \sin x$ ، فإن:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x) = \sin(ax \pm b)$ فإن:

$$\int \sin(ax \pm b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax \pm b) + c$$

مثال (٧): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \sin(3x - 4)$$

الحل

باستخدام تكامل دالة الجيب نجد أن:

$$\int \sin(3x - 4)\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x - 4) + c$$

ب- تكامل دالة جيب التمام Cosine Function Integration

إذا كانت $f(x) = \cos x$ ، فإن:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x)=cos(a\,x\pm b)$ فإن:

$$\int cos(a\,x\pm b)d\,x=\frac{1}{a}sin(a\,x\pm b)+c$$

مثال (٨): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x)=3\,x-cos(1-2\,x)$$

الحل

باستخدام قاعدة دالة جيب التمام نجد أن:

$$\int[3\,x-cos(1-2\,x)]d\,x=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}sin(1-2\,x)+c$$

مثال (٩): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x)=sin\,2\,x\;cos\,2\,x$$

الحل

حيث إن $2\,cos\,2\,x$ هي مشتقة $sin\,2\,x$ وبالتالي فإن:

$$\int sin\,2\,x\;cos\,2\,x\,d\,x=\frac{1}{2}\int sin\,2\,x(2\;cos\,2\,x)d\,x=\frac{1}{4}sin^2\,2\,x+c$$

ج- تكامل دالة $sec^2\,x$

إذا كانت $f(x)=sec^2\;x$ ، فإن:

$$\int sec^2\;x\,d\,x=tan\,x+c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x)=sec^2(a\,x\pm b)$ فإن:

$$\int sec^2(a\,x\pm b)\,d\,x=\frac{1}{a}tan(a\,x\pm b)+c$$

مثال (١٠): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x)=\frac{1}{cos^2\;2\,x}$$

الحل

باستخدام تعريف دالة قاطع الزاوية نجد أن:

$$\int\frac{1}{cos^2\;2\,x}d\,x=\int sec^2\;2\,x\,d\,x=\frac{1}{2}tan\,2\,x+c$$

د- تكامل الدالة $csc^2 x$

إذا كانت $f(x) = csc^2 x$ ، فإن:

$$\int csc^2 x\, d x = -cot\, x + c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x) = csc^2 (a x \pm b)$ فإن:

$$\int csc^2 (a x \pm b) d x = -\frac{1}{a} cot(a x \pm b) + c$$

مثال (١١): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \frac{cot^2 5 x}{cos^2 5 x}$$

الحل

من تعريف دالة ظل التمام نجد أن:

$$\int \frac{cot^2 5 x}{cos^2 5 x} d x = \int \frac{1}{cos^2 5 x} \times \frac{cos^2 5 x}{sin^2 5 x} d x = \int csc^2 5 x\, d x$$

$$= -\frac{1}{5} cot\, 5 x + c$$

هـ- تكامل الدالة $sec\, x\, tan\, x$

إذا كانت $f(x) = sec\, x\, tan\, x$ ، فإن:

$$\int sec\, x\, tan\, x\, d x = sec\, x + c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x) = sec(a x \pm b)\, tan(a x \pm b)$ فإن:

$$\int sec(a x \pm b)\, tan(a x \pm b) d x = \frac{1}{a} sec(a x \pm b) + c$$

مثال (١٢): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \frac{1}{cos\, 5 x\, cot\, 5 x}$$

الحل

باستخدام تعريف دالة القاطع والظل نجد أن:

$$\int \frac{1}{\cos 5x \cot 5x} dx = \int \sec 5x \tan 5x \, dx = \frac{1}{5} \sec 5x + c$$

مثال (١٣): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \sec x \; (\sec x + \tan x)$$

الحل متروك للقارئ.

و- تكامل الدالة $\csc x \cot x$

إذا كانت $f(x) = \csc x \cot x$ ، فإن:

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

♦ كما أنه إذا كانت $f(x) = \csc(ax \pm b) \cot(ax \pm b)$ فإن:

$$\int \csc(ax \pm b) \cot(ax \pm b) dx = -\frac{1}{a} \csc(ax \pm b) + c$$

مثال (١٤): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \frac{\cot \frac{5}{4} x}{\sin \frac{5}{4} x}$$

الحل

باستخدام تعريف دالة قاطع التمام نجد أن:

$$\int \frac{\cot \frac{5}{4} x}{\sin \frac{5}{4} x} dx = \int \csc \frac{5}{4} x \cot \frac{5}{4} x \, dx = -\frac{4}{5} \csc \frac{5}{4} x + c$$

مثال (١٥): أوجد تكامل الدالة:

$$f(x) = \frac{\csc\left(1 - \frac{2}{3} x\right)}{\tan\left(1 - \frac{2}{3} x\right)}$$

الحل متروك للقارئ.

٢/١- جدول طرق تكاملات بعض الدوال

بعد الدراسة المستفيضة لطرق تكاملات الدوال الجبرية والدوال المثلثية يمكن تلخيص هذه الطرق في جدول كالتالي:

مسلسل	الدالة	تكاملها
1	$y = c$	$c\,x + k$
2	$y = [f(u)]^n\, f'(x)$	$\frac{[f(u)]^{n+1}}{n+1} + c$
3	$y = \sin x$	$-\cos x + c$
4	$y = \sin(a\,x \pm b)$	$-\frac{1}{a}\cos(a\,x \pm b) + c$
5	$y = \cos x$	$\sin x + c$
6	$y = \cos(a\,x \pm b)$	$\frac{1}{a}\sin(a\,x \pm b) + c$
7	$y = \sec^2 x$	$\tan x + c$
8	$y = \sec^2(a\,x \pm b)$	$\frac{1}{a}\tan(a\,x \pm b) + c$
9	$y = \csc^2 x$	$-\cot x + c$
10	$y = \csc^2(a\,x \pm b)$	$-\frac{1}{a}\cot(a\,x \pm b) + c$
11	$y = \sec x\,\tan x$	$\sec x + c$
12	$y = \sec(a\,x \pm b)\tan(a\,x \pm b)$	$\frac{1}{a}\sec(a\,x \pm b) + c$
13	$y = \csc x\,\cot x$	$-\csc x + c$
14	$y = \csc(a\,x \pm b)\cot(a\,x \pm b)$	$-\frac{1}{a}\csc(a\,x \pm b) + c$

ثانياً: تطبيقات التكاملات Integration Applications

يوجد العديد من التطبيقات العملية على التكاملات بجميع أنواعها منها التطبيقات الهندسية والفيزيائية والمساحات وغيرها الكثير. ونعرض تفصيلياً هذه التطبيقات كما يلي:

٢/١ - تطبيقات هندسية Geometric Applications

درسنا في الفصل الرابع تطبيقات معادلات الدرجة الأولى والثانية، وفي هذا الجزء من الفصل نستخدم بعض مفردات الفصل الرابع كتطبيق هندسي على التكاملات في ما يلي:

تطبيق (١): أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(10\ ,\ 0)$، وميل خط التماس له هو:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$$

الحل

بإجراء التكامل لمعادل ميل خط التماس نحصل على:

$$y = x^3 - x^2 + c$$

بالتعويض عن $x = 0\ ,\ y = 10$ في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$10 = 1 - 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 10$$

وبالتالي فإن معادلة المنحنى هي:

$$y = x^3 - x^2 + 10$$

تطبيق (٢): إذا كانت:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - 4$$

أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1\ ,\ 5)$، وميل خط التماس له يساوي 5 عند نفس النقطة.

الحل

بإجراء التكامل مرة واحدة للحصول عل ميل خط التماس، نحصل على:

$$m=\frac{dy}{dx}=3x^2-4x+c_1$$

بالتعويض عن قيمة $x=1$ والميل $m=5$، نحصل على:

$$5=3-4+c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1=4$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x+4$$

بإجراء التكامل مرة أخرى، نجد أن:

$$y=x^3-2x^2+4x+c_2$$

بالتعويض عن قيمة $(x\ ,\ y)=(1\ ,\ 5)$، نحصل على:

$$5=1-2+4+c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2=2$$

وبالتالي فإن معادلة المنحنى هي:

$$y=x^3-2x^2+4x+2$$

تطبيق (٣): نفرض أن ميل العمودي على منحنى عند أي نقطة $(x\ ,\ y)$ هو:

$$m=\frac{5+2y}{2-3x^2}$$

فإذا كان المنحنى يمر بالنقطة $(1\ ,\ 2)$، أوجد معادلة هذا المنحنى.

الحل

حيث إن ميل العمودي على المنحنى هو $m=\dfrac{5+2y}{2-3x^2}$، فإن ميل خط التماس لهذا المنحنى هو $-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{2-3x^2}{5+2y}$، أي أن:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2-3x^2}{5+2y}$$

$$\Rightarrow \quad (5+2y)\,dy=(3x^2-2)\,dx$$

بإجراء التكامل للطرفين نجد أن:

$$\int(5+2y)\,dy=\int(3x^2-2)\,dx$$

$$\Rightarrow\quad 5y+y^2=x^3-2x+c$$

بالتعويض عن النقطة $(x\ ,\ y)=(1\ ,\ 2)$، نجد أن:

$$10+4=1-2+c \qquad\Rightarrow\qquad c=15$$

وبالتالي فإن معادلة المنحنى هي:

$$5y+y^2=x^3-2x+15$$

تطبيق (٤): أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بنقطة الأصل، إذا كان ميل خط التماس له عند أي نقطة عليه $(x\ ,\ y)$ هو:

$$m=1-\sin 2x$$

الحل

ميل خط التماس للمنحنى عند أي نقطة عليه $(x\ ,\ y)$ هو:

$$m=\frac{dy}{dx}=1-\sin 2x$$

بإجراء التكامل نحصل على معادلة المنحنى كالآتي:

$$y=\int(1-\sin 2x)\ x=x+\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

حيث إن المنحنى يمر بنقطة الأصل نجد أن:

$$0=0+\frac{1}{2}\cos 0+c \quad\Rightarrow\quad c=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن معادلة المنحنى هي:

$$y=x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

تطبيق (٥): إذا كانت معادلة خط التماس لأي منحنى عند النقطة $(0\ ,\ 2)$ الواقعة عليه هي:

$$y=2(x+1)$$

وكان $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2\sin 2x$

أوجد معادلة هذا المنحنى.

تطبيق (٦): إذا كان المنحنى $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ يمـر بالنقطـة $(1\,,4)$، وميلـه عند أي نقطة عليه هو $6\,x$.أوجد معادلة المنحنى $f(x)$ عند النقطة $(1\,,6)$.

حل التطبيقين (٥) ، (٦) متروك للقارئ.

٢/٢ – تطبيقات فيزيائية Physics Applications

كما سبق في الفصل الثامن تم دراسة التطبيقات الفيزيائيـة وأهميتهـا للرجـل العسـكري في جميع مجالاتـه، نقوم بدراسـة العملية العكسية لهذه التطبيقات، وذلك بمعلومية التسارع Acceleration يمكن إيجاد السرعة Velocities والمسافة المقطوعة Distances بالترتيب.

تطبيق (٧): يتحـرك جسيم في خط مستقيم أفقي بحيث يكون تسارعه هو:

$$a = 3t\;m/sec^2$$

أوجد سرعة الجسيم v كدالة في الزمن. إذا كانت سرعته بعد ثانيتين هي $4\,m/sec$.

الحل

بإجراء التكامل لدالة التسارع، نجد أن السرعة هي:

$$v = \int 3t\;dt = \frac{3}{2}t^2 + c$$

بالتعويض عن $v = 4\,m/sec\;,\;t = 2\,sec$، نجد أن:

$$4 = \frac{3}{2}(2)^2 + c \;\;\Rightarrow\;\; c = -2$$

وبالتالي فإن السرعة كدالة في الزمن هي:

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2\;m/sec$$

تطبيق (٨): قذف جسـيم رأسـياً إلى أعلى من موضع يرتفع $48\,ft$ أعلى سطح الأرض بسرعة ابتدائية $32\,ft/sec$. بإهمال مقامة الهواء أوجد:

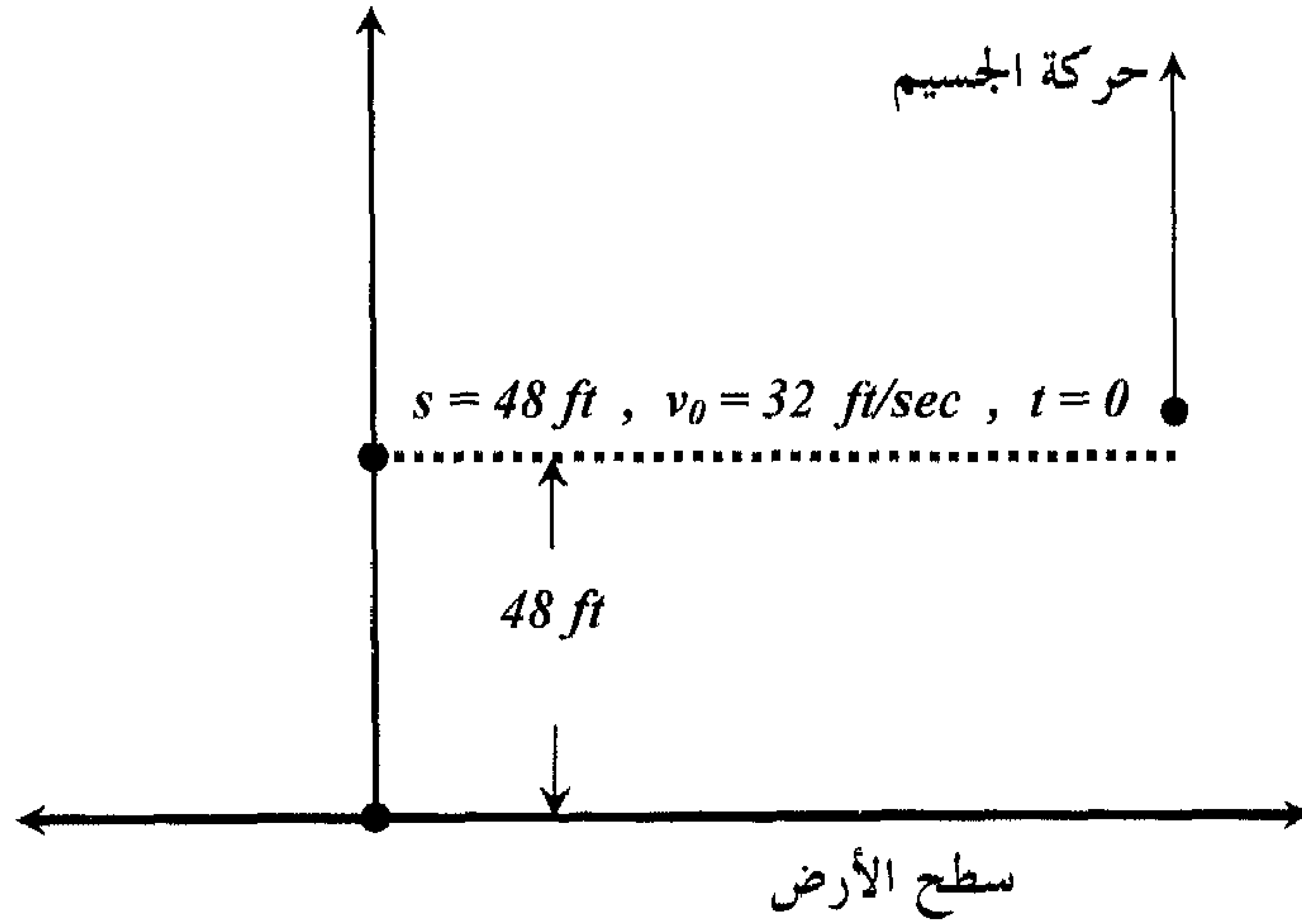
أ – ارتفاع الجسيم أعلى سطح الأرض بعد t ثانية.

ب – الزمن الذي يأخذه الجسيم كي يصل إلى أقصى ارتفاع.

ج – متى يصطدم الجسيم بسطح الأرض. وما هي سرعته حينئذٍ؟

الحل

نعلم أنه عندما تكون حركة الجسيم رأسية صعوداً أو هبوطاً فإن حركته تتأثر بعجلة الجاذبية الأرضية (التسارع)، ولهذا التسارع قيمة تقريبية ثابتة تساوي $a = \pm 32\ ft/sec^2$ or $a = \pm 980\ cm/sec^2$. ويمكن توضيح حركة الجسيم لهذا المثال بالرسم التالي:



وحيث إن حركة الجسيم إلى أعلى، فهذا يعني أن سرعته تناقصية، ومن ثم فإن التسارع يكون سالباً. وبالتالي فإن:

$$a = -32\ ft/sec^2$$

بإجراء التكامل، نجد أن السرعة هي:

$$v(t) = -32t + c_1$$

وحيث إن $v = 32$ عندما $t = 0$، فإن:

$$c_1 = 32$$

أي أن السرعة هي:

$$v(t) = -32t + 32$$

أ – بإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على المسافة كما يلي:

$$s(t) = -16t^2 + 32t + c_2$$

وحيث إن $s = 48$ عندما $t = 0$، فإن:

$$c_2 = 48$$

وبالتالي فإن المسافة هي:

$$s(t) = -16t^2 + 32t + 48$$

ب – عندما يصل الجسيم إلى أقصى ارتفاع يسكن لحظياً ثم يسقط، وعند هذه اللحظة $v = 0$، وبالتالي فإن:

$$0 = -32t + 32 \quad \Rightarrow \quad 32t = 32$$

$$\Rightarrow \quad t = 1\,sec$$

أي أن الجسيم يصل إلى أقصى ارتفاع بعد ثانية واحدة.

ج – يصطدم الحجر بسطح الأرض عندما تكون المسافة $s = 0$، أي أن:

$$0 = -16t^2 + 32t + 48$$

$$\Rightarrow \quad t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-3)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 3\ sec \quad or \quad t = -1\,sec\,(\text{مرفوض})$$

وبالتالي فإن الحجر يصطدم بسطح الأرض بعد ثلاث ثواني. كما أن السرعة عند هذه اللحظة هي:

$$v(3\,sec) = -32 \times 3 + 32 = -96 + 32 = -64\ ft/sec$$

وهذا يعني أن الجسيم تحرك في اتجاه تناقص المسافة.

تطبيق (٩): جندي يقود عربة مصفحة بسرعة $60\ km/h$، رصد هدفاً فبدأت تتناقص سرعة العربة بمعدل $30\ km/h$. أوجد المسافة التي قطعتها العربة حتى توقفت.

الحل

من معطيات التطبيق نجد أن تسارع العربة هو:

$$a = -30\,km/h^2$$

بإجراء التكامل، نجد أن سرعة العربة هي:

$$v(t) = -30t + c_1$$

وحيث إن $v = 60$ عندما $t = 0$، فإن:

$$c_1 = 60$$

أي أن السرعة هي:

$$v(t) = -30t + 60$$

بإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على المسافة كما يلي:

$$s(t) = -15t^2 + 60t + c_2$$

وحيث إن $s = 0$ عندما $t = 0$، فإن:

$$c_2 = 0$$

وبالتالي فإن المسافة التي تقطعها العربة هي:

$$s(t) = -15t^2 + 60t$$

ولكن العربة تتوقف عندما تكون $v = 0$، وبالتالي فإن:

$$0 = -30t + 60 \quad \Rightarrow \quad 30t = 60$$

$$\Rightarrow \quad t = 2h$$

أي أن العربة تتوقف بعد ساعتين من بدء الحركة.

وبالتالي فإن المسافة التي تقطعها العربة حتى الوقوف هي:

$$s(2) = -15(2)^2 + 60 \times 2 = 60 \ km$$

٢/٣- التكامل المحدود وحساب المساحات

نفرض أن الدالة $f(x)$ دالة أصلية للدالة $F(x)$ المتصلة والقابلة للتكامل على الفترة $[a , b]$، فإن التكامل المحدود Definite integral للدالة $F(x)$ يعرف كالآتي:

$$\int_{x=a}^{x=b} F(x)dx = [f(x)]_a^b = f(a) - f(b)$$

المعنى الهندسي للتكامل هو المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $F(x)$ من النقطة $x = a$ إلى النقطة $x = b$. كما يُعرف بالنظرية الأساسية للتكامل Fundamental theorem of integration. وهذه الصورة تسمى صيغة نيوتن – ليبنز Newton – Leibntiz formula للتكامل المحدود، كما تسمى a , b بالحد السفلي والحد العلوي للتكامل على الترتيب.

تطبيق (١٠): أحسب المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f(x)$ من النقطة $x = 0$ إلى النقطة $x = 1$:

$$f(x) = 20\,x^4 - 10\,x + 5$$

الحل

كما سبق في حل مثال (١) نجد أن:

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(20\,x^4 - 10\,x + 5\right) d\,x = \left[4\,x^5 - 5\,x^2 + 5\,x\right]_0^1 = 4\;units$$

تطبيق (١١): أحسب المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f(x)$ من النقطة $x = 0$ إلى النقطة $x = \pi/2$:

$$f(x) = 3\sin^2 x\;\cos x$$

الحل

المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة المذكورة هي:

$$3\int_{x=0}^{x=\pi/2} \sin^2 x\;\cos x\;d\,x = 3\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1\;unit$$

ملاحظات

توجد بعض الخواص الهامة والتي تُيَسِّر على الطالب حساب قيمة بعض التكاملات المحددة. نذكر منها على سبيل المثال:

$$i)\;\int_a^b f(x)\,d\,x = -\int_b^a f(x)\,d\,x$$

$$ii)\;\int_a^a f(x)\,d\,x = 0$$

$$iii)\;\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x$$

$$iv)\;\int_{-a}^{a} f(x)\,d\,x = 2\int_0^a f(x)\,d\,x\;\;,\;\; f(x)\;is\;even\;function\;(\text{دالة زوجية})$$

$$v)\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\ ,\ f(x)\ \text{is odd function}\ (\text{دالة فردية})$$

تطبيق (١٢): أحسب المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f(x)$ من النقطة $x=-2$ إلى النقطة $x=2$:

$$f(x)=10\,x^3$$

الحل

حيث إن الدالة $f(x)$ فردية، وبالتالي فإن:

$$10\int_{x=-2}^{x=2} x^3\,dx = 0$$

تطبيق (١٣): أحسب المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f(x)$ من النقطة $x=-1$ إلى النقطة $x=1$:

$$f(x)=6\,x^5+5\,x^4-4\,x^3+3\,x^2-2\,x+1$$

الحل

حيث الدالة تنقسم إلى دالتين أحدهما زوجية والأخرى فردية، كما يلي:
الدالة $\left(6\,x^5-4\,x^3-2\,x\right)$ فردية، أما الدالة $\left(5\,x^4+3\,x^2+1\right)$ فهـي زوجيـة.
وبالتالي فإن:

$$\int_{-1}^{1}\left(6\,x^5+5\,x^4-4\,x^3+3\,x^2-2\,x+1\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(6\,x^5-4\,x^3-2\,x\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(5\,x^4+3\,x^2+1\right)dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}\left(5\,x^4+3\,x^2+1\right)dx = 2\times 9 = 18\ \text{units}$$

تمارين

١ – أوجد تكامل الدوال الآتية:

$a)\ \int (2x+3)^4\, dx$

$b)\ \int \frac{(2x+1)^2}{3x}\, dx$

$c)\ \int \left(\sqrt{2}\,x+1\right)^2 dx$

$d)\ \int x(x+a)(x+b)\,dx \quad , \quad a\ ,b\ \text{are constants}$

$e)\ \int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$

$f)\ \int \left(2x^6+\cos 2x\right)dx$

$g)\ \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx$

$h)\ \int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

$i)\ \int 6x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

$j)\ \int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$

$k)\ \int \sec^2 2ax\,dx$

$l)\ \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$m)\ \int \tan x\,\sec^2 x\,dx$

$n)\ \int \cot^2 x\,\sec^2 x\,dx$

$o)\ \int \tan^5 3x\,\sec^2 3x\,dx$

$p)\ \int (\tan x+5)^{10}\sec^2 x\,dx$

٢ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أي نقطة يساوي ضعفي الإحداثي السيني للنقطة بإشارة مخالفة. ثم أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1,1)$

٣ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أي نقطة يساوي $3x^2-2x$. ثم أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(2,-4)$

٤ – إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}=x^2-1$ عند كل نقطة على منحنى ما. أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1,1)$ والذي يمس الخط المستقيم $x+12y=13$.

٥ – إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}=2$ عند كل نقطة على منحنى ما:

أ – أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1,1)$ وميل المماس له يساوي 7 عند هذه النقطة.

ب – أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1,8)$ ويمس الخط المستقيم $x+12y=13$. عند هذه النقطة.

ج – أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1,1)$.

٦ – أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بنقطة الأصل، وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي $x\sqrt{x}$.

٧ – أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(3,-1)$ وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{4x-1}{2y}$.

٨ – يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع $a(t)=\frac{1}{(2t+3)^3}\ ft/sec^2$، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة هي $4\ ft/sec$. أوجد سرعته بعد أربع ثوان من بدء الحركة.

٩ – قذف جسيم إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض بسرعة ابتدائية $69\ ft/sec$. أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم.

١٠ – يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع $a(t)=(6t-6)\ ft/sec^2$.

أ – أوجد المسافة والسرعة كدالة في الزمن، علماً بأن سرعته $30\ ft/sec$ بعد مرور خمس ثوان من بدء الحركة، والمسافة $60\ ft$ حينئذٍ.

ب – أوجد المسافة والسرعة كدالة في الزمن، علماً بأن سرعته $30\ ft/sec$ من بدء الحركة من نقطة الأصل.

١١ – تتدحرج كرة على مستوى بسرعة ابتدائية $8\ ft/sec$، فإذا كانت سرعتها تتناقص بسبب الاحتكاك بمعدل $2\ ft/sec$. أوجد المسافة التي تقطعها هذه الكرة.

١٢ – أُلقيت قذيفة من منطاد ساكن يعلو عن سطح الأرض مسافة $300m$ لأسفل مباشرة بسرعة $15m/sec$. أوجد موضع الحجر وسرعته بعد $20sec$.

١٣ – تُرِكَ جسيم يسقط من منطاد يعلو سطح الأرض مسافة $196\ ft$. فإذا كان المنطاد يرتفع إلى أعلى بمعدل $15\ ft/sec$. أوجد:

أ – أقصى ارتفاع يصله الجسيم عن سطح الأرض.

ب – الزمن الذي يقضيه الجسيم في الجو.

ج – سرعة الجسيم عند اصطدامه بسطح الأرض.

١٤ – يتحرك جسيم على خط مستقيم من نقطة الأصل ($t=0$):

بسرعة ابتدائية $2\ ft/sec\ ,\ 96\ ft/sec\ ,\ -3\ ft/sec\ ,\ 4\ ft/sec$، وتسارع

$$32\ ft/sec^2\ ,\ -32\ ft/sec^2\ ,\ \left(12t^2+6t\right)ft/sec^2\ ,\ \frac{1}{\sqrt{t}}\ ft/sec^2$$

على الترتيب. أوجد مسافة الجسيم كدالة في الزمن.

١٥ – تتباطأ سيارة حربية بمعدل $0.025\ ft/sec$. أوجد المسافة التي تقطعها السيارة قبل أن تقف إذا كانت سرعتها الابتدائية $25\ ft/sec$.

١٦ – يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع $\left(6t^2-8\right)ft/sec^2$. أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم من بدء الحركة بعد خمس ثوان.

١٧ – احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$a)\ \int_0^2 x\sqrt{x^2+3}\,dx$$

b) $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+5}\,dx$

c) $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x \tan x \, dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin^3 x \, dx$

١٨ – يتحرك جسيم على خط مستقيم بدأً من نقطة الأصل عند اللحظة $t = 0$ بسرعة كـــالآتي $t^2 - 3t$, $\sqrt{t} + 5$, $6t + 3$, $2t - 2$, $3t^2 + 2t$, $4t + 1$. أوجـــد المـــسافة التـــي يقطعهـــا الجـــسيم خـــلال الفتـــرة الزمنيـــة مـــن $t = 0 , 2 , 0 , 1 , 4 , 0$ إلى $t = 4 , 4 , 5 , 3 , 9 , 4$ على الترتيب.

الفصل العاشر

فن العد

THE ART OF COUNTING

مقدمة Introduction

هذا الفصل يعالج بعض المفاهيم المختلفة المستخدمة في حل مشاكل العد. هذه المفاهيم هي جزء مهم من علم الرياضيات يعرف بفن العد (نظرية التركيبات - التوافيق) Art of Counting (Combinatorics Theory)، وعلماء الرياضيات المتخصصون في هذا الفرع يسمون بالمركبين (الموفقين) Combinatorialists. ونظرية التركيبات هي إحدى الفروع الأكثر أهمية في الرياضيات والتي لها تطبيقات عديدة في علوم الحاسب الآلي.

إن معالجة مشكلة ما ضمن نظرية التركيبات تتطلب الإجابة على الأسئلة الثلاث التالية:

- هل يوجد حل للمشكلة؟
- ما هو عدد الحلول الممكنة لهذه المشكلة؟
- كيف نختار من مجموعة حلول المشكلة حلاً أمثلياً بالنسبة إلى خاصية معينة؟

لذلك، فإننا سنقدم بعض طرق العد مثل التباديل والتوافيق ومبدأ برج الحمام التي تساعدنا جميعها على معرفة عدد عناصر مجموعة منتهية وكبيرة نسبياً دون أن نكتب عناصرها في قائمة منفصلة.

أولاً: مبادئ العد Counting Principles

نفـرض أن A مجموعــة منتهية، فإننا نرمز لعدد عناصرها بــالرمز $|A|$ أو الرمز $n(A)$. سنتناول في ما يلي مبدأين هامين هما مبدأ الجمع ومبدأ الضرب:

١/١- مبدأ الجمع The Addition Rule

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية، فإن:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| \ldots |A_n|$$

حيث $A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad i \neq j$.

البرهان متروك للقارئ.

نظرية (١)

إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات منتهية فإن:

$$i)\ |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

هذا القانون يسمى مبدأ التضمين والإقصاء لمجموعتين

The principle of inclusion – exclusion for two sets

$$ii)\ |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C|$$

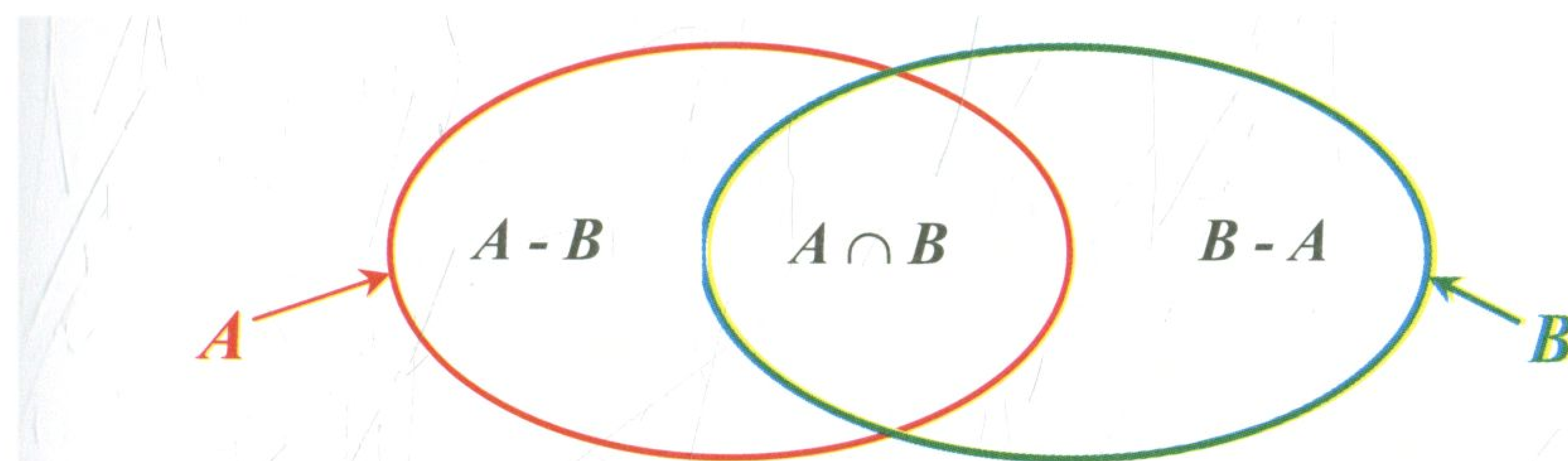
$$- |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

هذا القانون يسمى مبدأ التضمين والإقصاء لثلاث مجموعات

The principle of inclusion – exclusion for three sets

البرهان

(i) نستخدم شكل فن الآتي لتسهيل البرهان:



من شكل فن نجد ان:

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$\Rightarrow \quad |A\cup B| = |A\cup(B-A)| \qquad (1)$$

وحيث إن:

$$A\cap(B-A)=\phi$$

فإنه طبقاً لمبدأ الجمع نجد أن العلاقة (*1*) تكون :

$$|A\cup B| = |A\cup(B-A)| = |A| + |B-A| \qquad (2)$$

من شكل فِن السابق نجد أن:

$$B=(A\cap B)\cup(B-A)$$

$$\Rightarrow \quad |B| = |(A\cap B)\cup(B-A)| \qquad (3)$$

وحيث إن:

$$(A\cap B)\cap(B-A)=\phi$$

طبقاً لمبدأ الجمع نجد أن العلاقة (*3*) تصبح:

$$|B| = |A\cap B| + |B-A|$$

وبالتالي فإن:

$$|B-A| = |B| - |A\cap B| \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (2) نجد أن:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

وهو المطلوب إثباته.

(*ii*) لإثبات صحة هذا القانون نستخدم القانون (*i*) السابق كالآتي:

$$|A\cup B\cup C| = |A\cup(B\cup C)| = |A| + |B\cup C| - |A\cap(B\cup C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - |(A\cap B)\cup(A\cup C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - |A\cap B| - |A\cup C| + |A\cap B\cap C|$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال (١): يدرس *50* طالباً في إحدى الكليات. *32* طالباً يدرسون الرياضيات، *18* طالباً يدرسون الفيزياء، *26* طالباً يدرسون علوم الحاسب. هناك *9* طلاب يدرسون

الرياضيات والفيزياء، *8* طلاب يدرسون الفيزياء وعلوم الحاسب و *16* طالباً يدرسون الرياضيات وعلوم الحاسب، كما أن هناك *47* طالباً يدرس كل منهم إحدى هذه اللغات الثلاث على الأقل. أوجد عدد الطلاب الذين يدرسون:

أ – الرياضيات والفيزياء وعلوم الحاسب.

ب – الرياضيات وعلوم الحاسب فقط.

ج – الرياضيات فقط.

الحل

نفرض أن A يمثل مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات، كما أن B مجموعة الطلاب الذين يدرسون الفيزياء و C يمثل مجموعة الطلاب الذين يدرسون علوم الحاسب.

أ – باستخدام مبدأ الجمع نجد أن:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

وبالتالي فإن عدد الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث معاً هو:

$$|A\cap B\cap C|=47-32-18-26+9+8+16$$

$$=47-76+33=4 \ \ Students$$

ب – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات وعلوم الحاسب فقط هو:

$$|A\cap C|-|A\cap B\cap C|=16-4=12 \ \ Students$$

ج – عدد الطلاب الذين الرياضيات فقط هو:

عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات مطروحاً منه (عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء فقط + عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات وعلوم الحاسب فقط + عدد الطلاب الذين يدرسون اللغات الثلاث معاً).

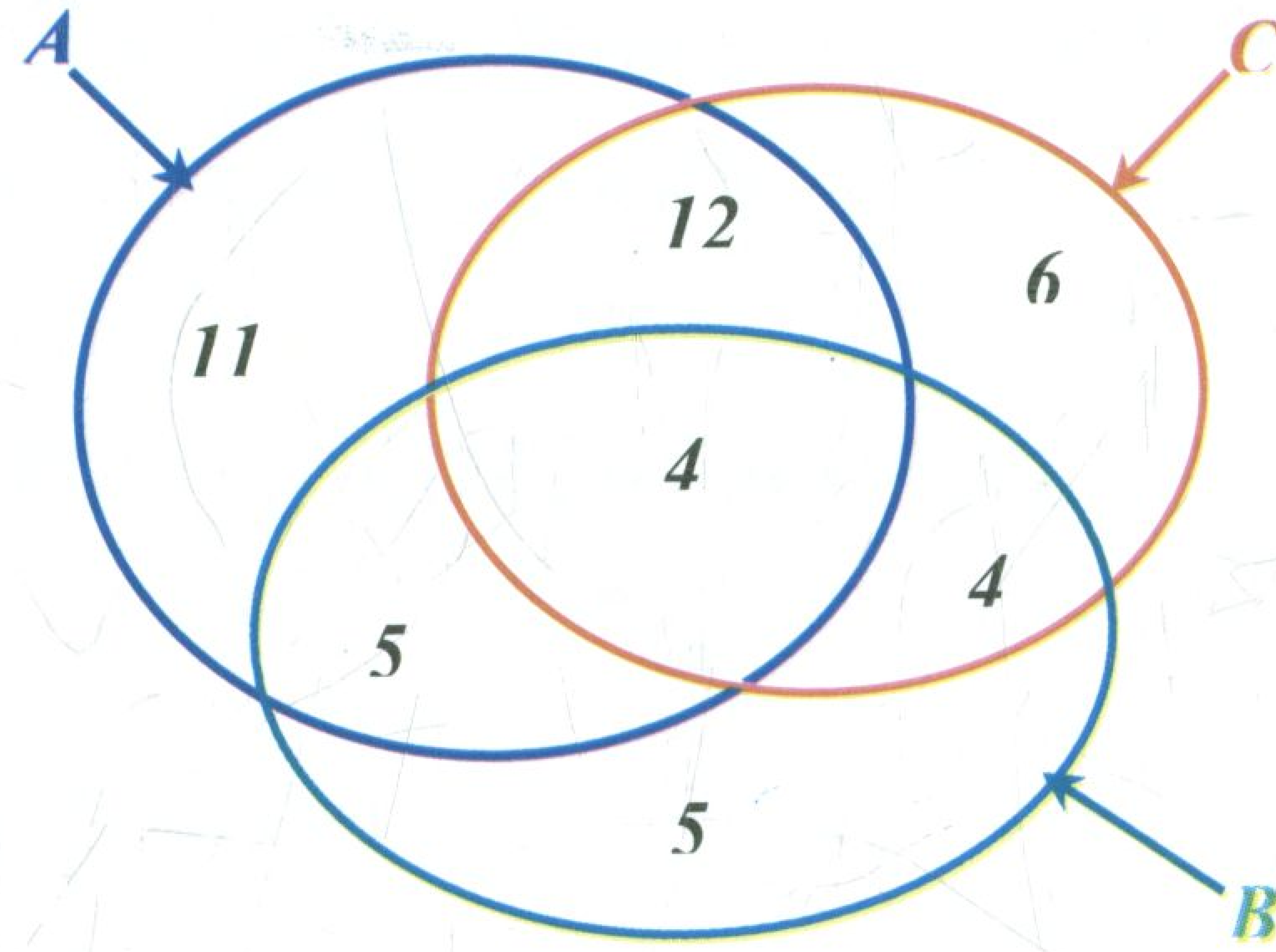
والآن نحاول إيجاد عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء فقط وهو:

$$|E\cap G|-|E\cap G\cap F|=9-4=5 \ \ Students$$

وبالتالي فإن عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات فقط هو:

$$32-5-12-4=11 \ \ Students$$

يمكن توضيح حل المثال السابق بواسطة شكل فن الآتي:



١/٢- مبدأ الضرب The Multiplication Rule

إذا كانت $A_1 , A_2 , A_3 , \cdots , A_n$ مجموعات منتهية فإن:

$$| A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

حيث:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , \cdots , x_n) : x_i \in A_i \}$$

البرهان متروك للقارئ.

ملاحظات

أ - غالبا ما نستخدم الصياغة التالية لمبدأ الضرب عندما نعالج المسائل:

♦ إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز المتتالية الآتية:

$$A_1 , A_2 , A_3 , \cdots , A_k$$

♦ وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لا يعتمد على الكيفية التي أُنجزت بها المهمات:

$$A_1 , A_2 , A_3 , \cdots , A_{j-1} \quad , \quad 2 \le j \le k \quad , \quad j \in Z$$

♦ وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j هو n_j لكل $j \in Z \quad , \quad 1 \le j \le k$. فإن عدد طرق إنجاز المهمة A هو:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

ب - إذا كان عدد عناصر المجموعة المنتهية A هو n، وعدد عناصر المجموعة المنتهية B هو m، فإن عدد عناصر حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ هو $n\,m$. أي أنه إذا كان: $|A| = n \quad , \quad |B| = m \quad \Rightarrow \quad |A \times B| = m\,n$

مثال (٢): نفرض أن Σ هي مجموعة أبجدية عدد عناصرها m. أي أن $|\Sigma| = m$.

أ – أوجد عدد الكلمات التي طول كل منها n حرفاً، والتي حروفها مأخوذة من المجموعة Σ.

ب – أوجد عدد الكلمات التي طول كل منها n حرفاً على الأكثر.

الحل

أ – نفرض أن $\sum n$ هي مجموعة الكلمات التي طول كل منها n حرفاً، أي أن المطلوب هو $|\sum n|$.

حيث إن: عدد طرق اختيار الحرف الأول في الكلمة هو m،

عدد طرق اختيار الحرف الثاني في الكلمة هو m،

عدد طرق اختيار الحرف الثالث في الكلمة هو m،

... ... $\vdots$

عدد طرق اختيار الحرف النوني في الكلمة هو m،

طبقاً لمبدأ الضرب، عدد عناصر مجموعة الكلمات التي طول كل منها n حرفاً هو:

$$|\sum n| = \underbrace{m \cdot m \cdot m \quad \cdots \quad m}_{n \text{ من العوامل}} = m^n$$

ب – نفرض أن Γ_n هي مجموعة كل الكلمات التي طول كل منها n حرفاً على الأكثر،

$$\therefore \quad \Gamma_n = \sum 0 \cup \sum 1 \cup \sum 2 \cup \quad \cdots \quad \cup \sum n{-}1 \cup \sum n$$

وحيث إن المجموعات $\sum 0 , \sum 1 , \sum 2 , \quad \cdots \quad , \sum n{-}1 , \sum n$ متنافية فإن:

$$|\Gamma_n| = |\sum 0| + |\sum 1| + |\sum 2| + \quad \cdots \quad + |\sum n{-}1| + |\sum n|$$

$$= 1 + m + m^2 + m^3 + \quad \cdots \quad m^n = \frac{1 - m^{n+1}}{1 - m}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m^{n+1} - 1}{m - 1} & , \quad m \neq 1 \\ n + 1 & , \quad m = 1 \end{cases}$$

مثال (٣): يعمل في إحدى المستشفيات 4 أطباء، 7 ممرضين، 3 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفني؟

الحل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق مختلفة ، ويمكن اختيار الممرض بسبع طرق مختلفة ، ويمكن اختيار الفني بثلاث طرق مختلفة. وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة هو:

$(4)\,(7)\,(3) = 84$ طريقة

مثال (٤): كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عدداً فردياً؟

الحل

نعلم أن مجموعة الأعداد التي يمكن تكوين منها عدداً من رقمين هي:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

نفرض أن y يمثل رقم الآحاد، كما أن x يمثل رقم العشرات. أي أن الرقم المطلوب هو $x\,y$، ويكون المطلوب هو أن يكون $x + y$ مساوياً عدداً فردياً.

نبدأ باختيار x، وبالتالي فإنه يمكن اختيار x من مجموعة الأرقام:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

أي أن عدد طرق اختيار x هو 9 طرق.

- إذا كان x عدداً فردياً، فيمكن اختيار y من مجموعة الأرقام:

$\{0, 2, 4, 6, 8\}$

- أما إذا كان x عدداً زوجياً، فيمكن اختيار y من مجموعة الأعداد:

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

وبالتالي فإن عدد طرق اختيار y بعد x هو 5 طرق.

أي أن عدد الأعداد المطلوبة هو:

$(5)\,(9) = 45$ عدداً

ثانياً: التباديل Permutations

لتوضيح مفهوم التباديل نطرح المثال التالي:

كل صباح يستقبل مدير مركز للحاسب الآلي برنامج كمبيوتر من كل طالب من أربعة طلاب، ويجب أن يقرر كيف يرتب هذه البرامج بعدالة (بدون تحيز)؟. لو رمزنا للبرامج الأربعة بالرموز p_1, p_2, p_3, p_4 فإن أي ترتيب للبرامج يناظر ترتيب الرموز السابقة. فعلى سبيل المثال الترتيب p_1, p_2, p_3, p_4 هو أحد التراتيب الممكنة. كما أن الترتيب p_2, p_4, p_1, p_3 هو ترتيب آخر، وهكذا . . . وبالتالي فإن:

أي تنظيم مرتب لمجموعة من الأشياء يسمى تبديلا لهذه الأشياء.

فإذا كان عندنا n من الأشياء موضوعة في تبديل معين فإننا نقول أن التبديل من الحجم n، أو يسمى n تبديلاً.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

كم تبديلاً يمكن تكوينه من الأربعة برامج السابقة ؟

والإجابة على هذا السؤال تتطلب وضع المثال التالي:

مثـــال (٥)

أ - يوجد تبديلين فقط من الحرفين a, b، هما ab, ba.

ب - يوجد ستة تباديل من الثلاثة حروف a, b, c، هي:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

ج - يوجد 24 تبديلاً من الأربعة حروف a, b, c, d، هي:

$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc$

$bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda$

$cdab, cdba, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$

ملاحظة

عدد التباديل لمجموعة من الأشياء يعتمد فقط على عدد هذه الأشياء وليس على نوعها.

ليس من الصعوبة استنتاج صيغة أو قانون لعدد التباديل لمجموعة من الأشياء عددها n، إذا استخدمنا قانون الضرب التالي:

عدد التبديلات لمجموعة n من الأشياء هو حاصل ضرب أول n مـن الأعـداد الصحيحة الموجبة. أي أن:

$$n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (3)(2)(1)$$

أي نحاول كتابة العوامل في صورة ضرب بترتيب تناقصي، وهذا الضرب يكتب كالتالي:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (3)(2)(1)$$

وتقرأ الصورة $n!$ (مضروب n) factorial n. ويمكن كتابـة المـضروبات الأولى كالآتي:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

مثـال (٦): نلاحظ أن:

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

$$\frac{8}{2}! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$(6! - 4!) = 4!\,(6 \times 5 - 1) = 4! \times 29 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 29 = 696$$

مثال (٧): يجلس أربعة أشخاص على مائدة مستديرة. المطلوب تبديل الأماكن بشرط ثبات شخص واحد في مكانه (على رأس المائدة).

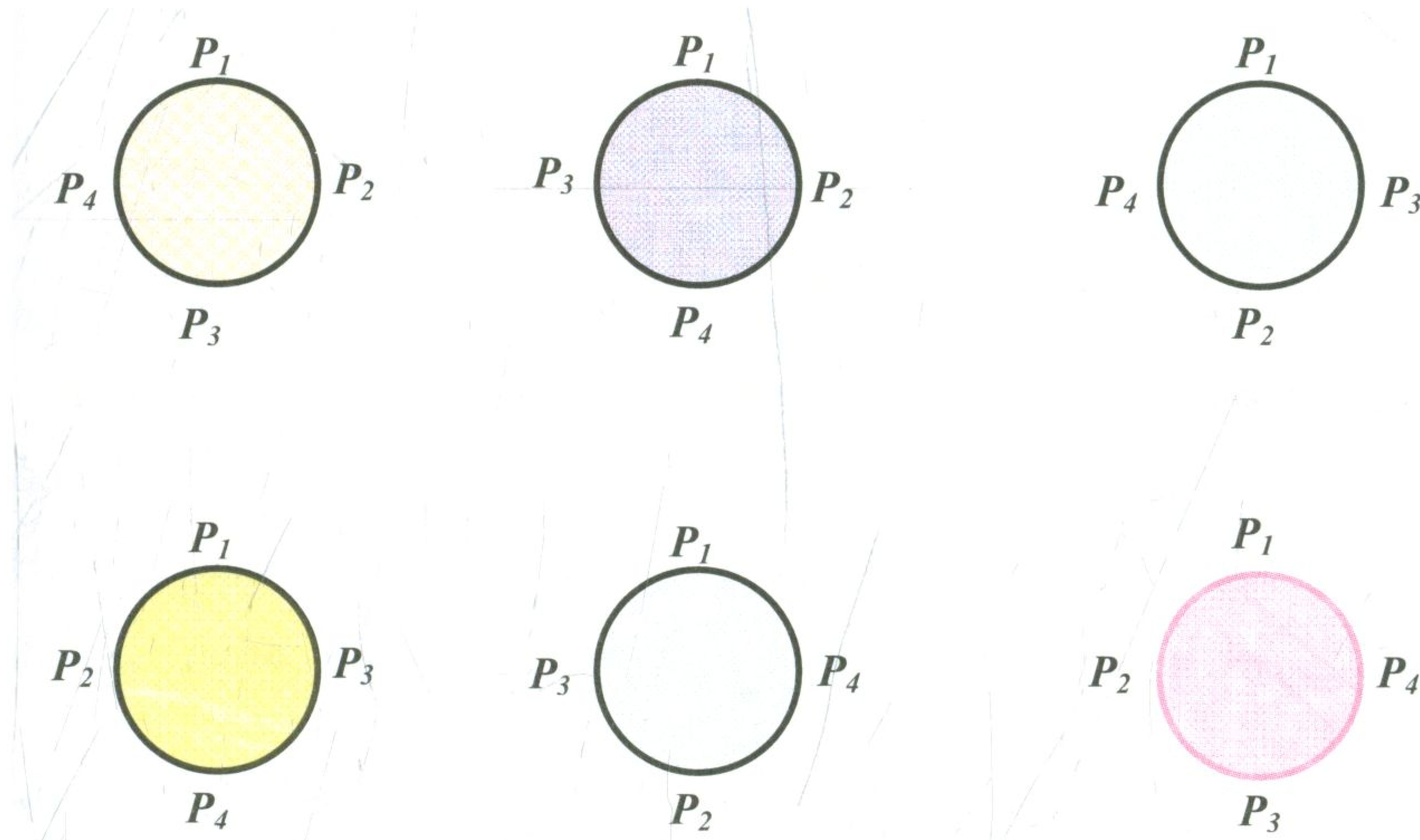
الحل

نفرض أن الأشخاص الأربعة هم p_1, p_2, p_3, p_4 ونقوم بتثبيت الشخص p_1 على رأس المائدة ونحاول تبديل الأماكن الثلاثة الأخرى. وبالتالي يكون هناك ثلاث اختيارات لأول جلوس بعد p_1، كما يوجد اختياران للجلوس الثاني، وأخيراً يوجد اختيار واحد أخير للجلوس الثالث.

طبقا لمبدأ الضرب نجد أن عدد طرق تنظيم الجلوس هو:

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$$

الشكل التالي يوضح الترتيب الدائري لجلوس الأشخاص الأربعة حول المائدة المستديرة:



وهذا بدوره يؤدي إلى الصياغة الآتية:

عدد التباديل الدائرية لـ n من الأشياء هو $(n - 1)!$.

٢/١ – تباديل أخرى More on Permutations

إذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها n، ونريد أن نجد صيغة لعدد التباديل من الحجم k والمأخوذة من المجموعة التي عدد عناصرها n $(k \leq n)$. نضع المثال التالي:

مثال (٨): نفرض أربعة رماة $\{a , b , c , d\}$ يطلقون النار على هدف ما، وذلك للتنافس على جائزتين للأكثر إصابة لهذا الهدف والذي يليه. فإذا كان a هو الفائز الأول، b هو الفائز الثاني، فإن النتيجة تكون ab. أما إذا كانت النتيجة cd، فإن c هو الفائز الأول، d هو الفائز الثاني، . . . وهكذا.

أي إذا كان a هو الفائز الأول، فإن إحدى النتائج التالية يمكن أن تحدث:

$ab \quad ac \quad ad$

أما إذا كان b هو الفائز الأول، فإن إحدى النتائج التالية يمكن أن تحدث:

$ba \quad bc \quad bd$

بالمثل إذا كان c أو d هو الفائز الأول.

وبالتالي فإن تباديل الحصول على جائزتين فقط للمتسابقين الأربعة هي:

ab	ac	ad	ba	bc	bd
ca	cb	cd	da	db	dc

وطبقاً لمبدأ الضرب يكون عدد النتائج هو:

$$4 \times 3 = 12$$

وإذا كان المطلوب هو التنافس على ثلاث جوائز، فإن تباديل الحصول على هذه الجوائز الثلاث للمتسابقين الأربعة هي:

♦ التباديل التي تشمل المتسابقين a , b , c هي:

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$

♦ التباديل التي تشمل المتسابقين a , b , d هي:

$abd \quad adb \quad bad \quad bda \quad dab \quad dba$

♦ التباديل التي تشمل المتسابقين a , c , d هي:

$acd \quad abd \quad cab \quad cda \quad dac \quad dca$

♦ التباديل التي تشمل المتسابقين b , c , d هي:

$bcd \quad bdc \quad cbd \quad cdb \quad dbc \quad dcb$

وطبقاً لمبدأ الضرب يكون عدد النتائج هو:

$4 \times 3 \times 2 = 24$

بتعميم أسلوب المناقشة الوارد في مثال (٨) مع استخدام مبدأ الضرب للحصول على صيغة تبين عدد التبديلات من الحجم k المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

نرمز لهذا العدد بالرمز $P(n,k)$ ويعرف كالآتي:

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2) \ \dots \ [n-(k-1)]$$

$$= n(n-1)(n-2) \ \dots \ (n-k+1) \quad , \quad 1 \le k \le n$$

مثال (٩)

أ - عدد التبديلات التي من الحجم 3 المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها 5 هو:

$P(5,3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

ب - إذا كانت Σ هي مجموعة أبجدية عدد حروفها 8، فإن عدد الكلمات التي طولها 4 المأخوذة من Σ بدون تكرار الحروف هو:

$P(8,4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

في هذه الحالة نلاحظ أن:

$n = 8 \ , \ k = 4 \qquad \Rightarrow \qquad n-k+1 = 8-4+1 = 5$

ملاحظـة

يوجد عدة رموز متشابهة كمصطلح للتباديل ألا وهي:

$$(n)_k = P(n,k) = {}^nP_k = n(n-1)(n-2) \ \dots \ (n-k+1) \quad , \quad 1 \le k \le n$$

الرمز $(n)_k$ يقرأ n مضروب أدنى k (n lower factorial k).

إذا كان $n = k$، فإن $n!$ يكون حالة خاصة من المضروب الأدنى، أي أن:

$$(n)_n = P(n,n) = {}^nP_n = n(n-1)(n-2) \ \dots \ (n-n+1)$$

$$= n(n-1)(n-2) \ \dots \ 2 \times 1 = n!$$

مثال (١٠): من التعريف نجد أن:

$(10)_3 = P(10,3) = {}^{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

نظرية (٢)

إذا كان n , k عددين صحيحين، حيث $1 \le k \le n$، فإن:

$$(n)_k = P(n,k) = {}^nP_k = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

البرهان

نفرض أن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n، أي أن $n = |A|$. فإذا أردنا أن نُكَوِّن تبديلاً من الحجم k في A، فإن عدد طرق اختيار العنصر الأول هو n، ومهما كان اختيارنا للعنصر الأول فإن عدد طرق اختيار العنصر الثاني هو $(n-1)$، ومهما كان اختيارنا للعناصر التي تسبق العنصر الأخير فإن عدد طرق اختيار العنصر الأخير هو $n-(k-1)$ أو $(n-k+1)$، وطبقاً لمبدأ الضرب نجد أن عدد التباديل هو:

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)$$

أي أن:

$$P(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)(n-k)\ \dots\ 2 \times 1}{(n-k)(n-k-1)\ \dots\ 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$$

نلاحظ أن

$$i)\ P(n,0) = (n)_0 = 1$$

$$ii)\ P(n,k) = (n)_k = n(n-1)_{k-1}$$

مثال (١١): إذا أردنا ترتيب 4 كتب مختلفة في الرياضيات، 3 كتب مختلفة في الفيزياء، 5 كتب مختلفة في الكيمياء على أحد أرفف مكتبة:

١ – بكم طريقة يمكن ترتيب جميع الكتب؟

٢ – بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نضع مجموعة كتب الفيزياء على يمين مجموعة كتب الرياضيات وأن نضع مجموعة كتب الكيمياء على يمين مجموعة كتب الفيزياء؟

٣ – بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نجعل كتب كل موضوع على حدة؟

الحل

١ – حيث إن عدد الكتب هو *12*.

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة لترتيب جميع الكتب هو:

$12! = 479001600 \ method$

٢ – عـــدد طرق ترتيب كتب الرياضيات هو *4!*، وعدد طرق ترتيب كتب الفيزيـــاء هو *3!*، وعدد طرق ترتيب كتب الكيمياء هو *5!*.

طبقاً لمبدأ الضرب نجد أن عدد الطرق الممكنة هو:

$(4!)(3!)(5!) = (24)(6)(120) = 17280 \ method$

٣ – عدد تباديل كتب (الرياضيات ، الفيزياء ، الكيمياء) هو *3!*.

طبقا للفقرة (٢) نجد أن عدد الطرق هو:

$[(4!)(3!)(5!)](3!) = (17280)(6) = 103680 \ method$

مثال (١٢): يريد مدير شركة أن يقابل خمسة أشخاص فبل صلاة الظهر وأربعة أشخاص آخرين بعد صلاة الظهر. بكم طريقة يمكنه أن يجدول المقابلات إذا كان يريد أن يقابل كل شخص على حدة؟

الحل

عدد الأشخاص الذين يقابلهم المدير قبل صلاة الظهر *5*.

وبالتالي فإن عدد طرق جدولة المقابلات لهذه الفترة هو:

$5! = 120 \ method$

كما أن عدد طرق المقابلات لفترة ما بعد الظهر هو:

$4! = 24 \ method$

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة هو:

$(5!)(4!) = (120)(24) = 2880 \ method$

مثال (١٣): نفرض أن المجموعة المنتهية $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
نريد أن نُكَوِّن متتالية من هذه الأعداد بحيث تكون حدودها مختلفة، وأيضاً يكون عدد حدودها يساوي *10*. بكم طريقة يمكن تكوين المتتالية إذا كانت:

١ – حدودها الخمسة الأولى فردية؟

٢ – حدودها تتناوب على النحو: فردي ، زوجي ، فردي ، . . . ؟

الحل

١ – نفرض أن $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ هي مجموعة الأعداد الفردية من A، أي أن $|B| = 5$. كما أن $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ هي مجموعة الأعداد الزوجية من A. أي أن $|C| = 5$.

وبالتالي فإن عدد طرق اختيار الحدود الخمسة الأولى الفردية هو:

$5! = 120$ method

كما أن عدد طرق اختيار الحدود الخمسة الأخيرة هو:

$5! = 120$ method

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة هو:

$(5!)(5!) = (5!)2 = (120)(120) = 14400$ method

٢ – حيث إن عدد حدود المتتالية هو 10، ولكن المتتالية متناوبة، فإن الأعداد الفردية بين حدودها هو 5. كذلك عدد الأعداد الزوجية بين حدودها هو 5.

وبالتالي فإن عدد الطرق هو:

$(5!)2 = (5!)(5!) = 14400$ method

مثال (١٤): في المملكة العربية السعودية، تتكون لوحات السيارات من ثلاثة أحرف يتبعها أربعة أرقام:

١ – أوجد عدد اللوحات الكلية.

٢ – أوجد عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة وأرقامها الثلاثة أيضاً مختلفة.

٣ – أوجد عدد اللوحات المختلفة في الحروف.

٤ – أوجد عدد اللوحات المختلفة في الأرقام.

٥ – أوجد عدد اللوحات المتشابهة في الحروف والأرقام.

الحل

نفرض أن A = { أ ، ب ، ت ، . . . . ، و ، ي } هي الأبجدية العربية وعدد حروفها 28 حرفاً.

كما أن B = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } هي مجموعة الأرقام العشرية.

١ – يمكن اختيار كل من الثلاث حروف بـــ 28 طريقة، كما أنه يمكن اختيار الأرقام الأربعة بـــ 10 طرق. وبالتالي فإن عدد اللوحات الكلية مع السماح بالتكرار هو:

$(28)\,(28)(28)\,(10)\,(10)\,(10)\,(10) = (28)^3\,(10)^4 = 219520000$ لوحة

٢ – حيث إنه لا يوجد تكرار بين الحروف والأرقام، وبالتالي فإن عدد طرق اختيـــار الحروف الثلاثة هو:

$P(28\,,3) = (28)\,(27)\,(26) = 19656$ لوحة

كما أن عدد طرق اختيار الأرقام الأربعة هو:

$P(10\,,4) = (10)\,(9)\,(8)\,(7) = 5040$ لوحة

وبالتالي فإن عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة وأرقامها الأربعة أيضاً مختلفـــة هو:

$P(28\,,3)\,.\,P(10\,,4) = (19656)\,.\,(5040) = 99066240$ لوحة

٣ – عدد اللوحات المختلفة في الحروف هو:

$P(28,3)\times 10^4 = 19656\times 10000 = 196560000$ لوحة

٤ – عدد اللوحات المختلفة في الأرقام هو:

$28^3\times P(10,4) = 21952\times 5040 = 110638080$ لوحة

٥ – عدد اللوحات المتشابهة في الحروف والأرقام هو:

$(28)\,.\,(10) = 280$ لوحة

مثال (١٥): منذ سنوات في المملكة العربية السعودية، كانت لوحات السيارات تتكون من ثلاثة أحرف يتبعها ثلاثة أرقام:

١ – أوجد عدد اللوحات الكلية.

٢ – أوجد عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة وأرقامها الثلاثة أيضاً مختلفة.

٣ – أوجد عدد اللوحات المتشابهة في الحروف والأرقام.

الحل متروك للقارئ.

مثال (١٦): إذا كانت $7\,P(n\,,5) = 6\,P(n+1\,,5)$. أوجد قيمة n.

الحل

حيث إن:

$$7\,P(n,5)=6\,P(n+1,5)$$

باستخدام تعريف التباديل نجد أن:

$$7n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=6(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\Rightarrow\quad 7(n-4)=6(n+1)\quad\Rightarrow\quad 7n-28=6n+6$$

$$\Rightarrow\quad 7n-6n=6+28$$

$$\Rightarrow\quad n=34$$

مثال (١٧): أوجد حل المعادلة الآتية لجميع قيم n:

$$5\,P(n,3)=2\,P(n-1,4)$$

الحل

حيث إن:

$$5\,P(n,3)=2\,P(n-1,4)$$

من تعريف التباديل نجد أن:

$$5\,n(n-1)(n-2)=2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$\Rightarrow\quad 5n=2(n^2-7n+12)$$

$$\Rightarrow\quad 2n^2-19n+24=0$$

$$\Rightarrow\quad n=8\quad or\quad n=3/2$$

وبالتالي فإن قيمة n تساوي 8.

٢/٢ – التباديل مع التكرار Permutations with Repetitions

إذا كان لدينا n من العناصر مقسمة إلى k من المجموعات المختلفة مثلاً، المجموعة الأولى تتكون من n_1 عنصراً مكرراً، والثانية تتكون من n_2

عنصراً مكرراً، . . . ، والمجموعة رقم k تتكون من n_k عنصراً مكــرراً. أي أن $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. فإن عدد التباديل الممكنة في هذه الحالة هو:

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)(n_3!) \quad \cdots \quad (n_k!)}$$

مثال (١٨): أوجد عدد التباديل الممكنة لحروف كلمة MOHAMMAD.

الحل

عدد التباديل الممكنة هو:

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)(n_3!) \quad \cdots \quad (n_k!)} = \frac{8!}{3! \times 1! \times 1! \times 2! \times 1!}$$

$$= \frac{40320}{12} = 3360$$

ثالثاً: التوافيق Combinations

في الجزئين السابقين درسنا التنظيم (التنسيق) المرتب للأشياء ، والآن سنقوم بدراسة التنسيقات غير المرتبة. فمثلاً:

نريد تحديد أو إيجاد (عدد المجموعات الجزئية من الحجم k، مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n، وذلك بنظام غير مرتب). لإيجاد هذا العدد، نبدأ بالتعريف الآتي:

تعريف

نفرض أن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n، أي أن $n = |A|$. فإذا كانت B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k، أي أن $k = |B|$. فإن أي نظام غير مرتب من k عنصر مأخوذة من A يسمى توفيق من الحجم k.

سوف نرمز لعدد التوافيق الممكنة من الحجم k والمأخوذة من مجموعة منتهية عدد عناصرها n بالرمز $C(n,k) = {}^{n}C_{k}$.

مثال (١٩): أوجد عدد التوافيق الممكنة والتي تتألف من ثلاثة أرقام من مجموعة الأرقام $\{1, 2, 3, 4\}$.

الحل

- ♦ التوفيق الذي يشمل الأرقام $1, 2, 3$ هو: $\{1, 2, 3\}$،
- ♦ التوافيق الذي يشمل الأرقام $1, 2, 4$ هو: $\{1, 2, 4\}$،
- ♦ التوافيق الذي يشمل الأرقام $1, 3, 4$ هو: $\{1, 3, 4\}$،
- ♦ التوافيق الذي يشمل الأرقام $2, 3, 4$ هو: $\{2, 3, 4\}$،

وبالتالي فإن عدد التوافيق الممكنة هو:

$$C(4, 3) = 4$$

نظرية (٣)

عدد التوافيق الممكنة $C(n,k)$ تحقق العلاقة:

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

حيث $P(n,k)$ هو عدد التباديل الممكنة من الحجم k والمأخوذة من مجموعة من الحجم n.

البرهان

نفرض أن A هي مجموعة منتهية عدد عناصرها n، وبالتالي فإن عدد المجموعات الجزئية التي لا تحتوي على أي عناصر (عدد عناصرها = صفر) هي المجموعة الخاوية Φ. أي أن $C(n,0)=1$.

ومن ناحية أخرى عرفنا سابقاً أن $P(n,0)=1$.

$$\therefore\ C(n,0)=\frac{P(n,0)}{0!}=1$$

نفرض أن $1\le k\le n$، وبالتالي فإن عدد طرق اختيار مجموعة جزئية من الحجم k في A بدون ترتيب هو $C(n,k)$. كما أن عدد طرق تراتيب المجموعة الجزئية هو $k!$.

طبقاً لمبدأ الضرب نجد أن:

$$P(n,k)=k!\,C(n,k)$$

$$\Rightarrow\quad C(n,k)=\frac{P(n,k)}{k!}\qquad,\qquad 0\le k\le n$$

ويأخذ رمز التوافيق $C(n,k)$ الرموز المتشابهة الآتية:

$$C(n,k)={}^{n}C_{k}=\binom{n}{k}$$

$$=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\qquad,\qquad 0\le k\le n$$

على سبيل المثال

$$C(7,3)=\frac{P(7,3)}{3!}=\frac{(7)_3}{3!}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,(7-3)!}=35\,,$$

$$C(10,5)=\frac{P(10,5)}{5!}=\frac{(10)_5}{5!}=\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\,(10-5)!}=252\,,$$

$$\binom{n}{1}=\frac{(n)_1}{1!}=n \quad , \quad \binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,0!}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\,n!}=1$$

نظرية (٤)

إذا كان $n\,,k$ عددين صحيحين، حيث $0\le k\le n$، أثبت أن:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

البرهان

من تعريف التوافيق نجد أن:

$$R.\,H.\,S.=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}=L.\,H.\,S.$$

ويستفاد من هذه النظرية في تيسير وتبسيط حساب $C(n,k)$ إذا كانت k أكبر من نصف n.

فمثلا

$$\binom{100}{2}=\frac{100!}{2!\,98!}=\frac{100\times 99}{2}=4950$$

كما أن:

$$\binom{100}{98}=\frac{100!}{98!\,2!}=\frac{100\times 99}{2}=4950$$

وهذا يحق النظرية السابقة.

صيغة باسكال Pascal's Formula

سميت الصيغة التالية باسم العالم الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal (1623–1662)، والتي تنص على:

إذا كان $n\,,k$ عددين صحيحين فإن:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \quad , \quad 1\le k\le n-1$$

البرهان

من تعريف التوافيق نجد أن:

$$R.H.S.=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$=(n-1)!\left[\frac{1}{k!\,(n-k-1)!}+\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{n-k}{k!\,(n-k)\,!}+\frac{k}{k!\,(n-k)!}\right]$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}=L.H.S.$$

مثال (٢٠): أثبت صحة العلاقتين الآتيتين:

$$a-\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$, \quad 0\le k\le n$$

$$b-\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

الحل

من تعريف التوافيق نجد أن:

$$a-R.H.S.=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}=L.H.S$$

$$b- R.H.S. = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = L.H.S.$$

مثال (٢١): ورقة اختبار تحتوي على سبعة أسئلة، والمطلوب من الطالب أن يجيب عن خمسة أسئلة فقط منها. بكم طريقة يُمكِن للطالب أن يجيب على الاختبار؟

الحل

عدد طرق اختيار الأسئلة للإجابة عليها هو:

$$\binom{7}{5} = \frac{P(7\,,5)}{5!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\times 6}{2} = 21 \quad \text{طريقة}$$

مثال (٢٢): يعمل أربعة أطباء وسبعة ممرضين في مستوصف ما، وللقيام بحملة تطعيم في إحدى المدارس نريد اختيار فريق طبي مؤلف من ستة أشخاص.

أ – بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا كان يتألف من طبيبين وأربعة ممرضين؟

ب – بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا أردنا أن يتضمن طبيباً واحداً على الأقل؟

ج – بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا أردنا أن يتضمن طبيباً واحداً على الأكثر؟

الحل

أ – عدد طرق اختيار الطبيبين هو $\binom{4}{2}$،

كما أن عدد طرق اختيار أربعة ممرضين هو $\binom{7}{4}$

طبقاً لمبدأ الضرب، نجد أن عدد طرق اختيار الفريق هو:

$$\binom{4}{2}\binom{7}{4} = \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{7!}{4!\,3!} = 6\times 35 = 210 \quad \text{طريقة}$$

ب – إذا كان الفريق يتضمن طبيباً واحداً، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{4}{1}\binom{7}{5}$

إذا كان الفريق يتضمن طبيبين، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{7}{4}\binom{4}{2}$

إذا كان الفريق يتضمن ثلاثة أطباء، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{7}{3}\binom{4}{3}$

إذا كان الفريق يتضمن أربعة أطباء، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{7}{2}\binom{4}{4}$

وبالتالي فإنه طبقاً لمبدأ الجمع، نجد أن عدد الطرق الممكنة هو:

$$\binom{4}{1}\binom{7}{5}+\binom{4}{2}\binom{7}{4}+\binom{4}{3}\binom{7}{3}+\binom{4}{4}\binom{7}{2}=455$$ طريقة

ج – إذا كان الفريق يتضمن على طبيباً واحداً، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{7}{5}\binom{4}{1}$

إذا كان الفريق لا يتضمن أي طبيب، فان عدد طرق الاختيار هو $\binom{7}{6}\binom{4}{0}$

وبالتالي فإنه طبقاً لمبدأ الجمع، نجد أن عدد الطرق الممكنة هو:

$$\binom{4}{1}\binom{7}{5}+\binom{4}{0}\binom{7}{6}=91$$ طريقة

مثال (٢٣): إذا كانت A مجموعة منتهية كالآتي $A=\{1,2,3,...,15\}$. أوجد عدد المجموعات الجزئية من الحجم 2 في A والتي لا تتكون من عددين متعاقبين؟

الحل

حيث أن $|A|=15$ ، فإن عدد المجموعات الجزئية من الحجم 2 في A هو $\binom{15}{2}$، كما أن المجموعات الجزئية التي تتكون من عددين متعاقبين هي:

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},...\{13,14\},\{14,15\}$$

وعدد هذه المجموعات يساوي 14 مجموعة.

وبالتالي فان عدد المجموعات الجزئية من الحجم 2 في A والتي لا تتكون من عددين متعاقبين هو:

$$\binom{15}{2}-14=91$$ مجموعة

مثال (٢٤): يعمل 12 مهندساً في شركة ما، ولتنفيذ إحدى المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

أ – بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

ب – بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصرا مهندسين على العمل معاً؟

ج – بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفضا مهندسين أن يعملا معاً؟

الحل

أ – عدد الطرق التي يمكن للشركة أن تختار بها فريق العمل هو:

$$\binom{12}{5} = 792$$ طريقة

ب – نفرض أن المهندسين اللذين يصران على العمل معاً هما x , y.

إذا كان x , y ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة هو $\binom{10}{3}$

أما إذا كان x , y ليسا ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة هو $\binom{10}{5}$

طبقاً لمبدأ الجمع نجد أن عدد الطرق الممكنة هو:

$$\binom{10}{5}+\binom{10}{3} = 372$$ طريقة

ج – إذا كان x ضمن فريق العمل المختار فإن y ليس ضمن الفريق، بالمثل إذا كان y ضمن الفريق فإن x ليس ضمن الفريق، وبالتالي فان عدد الطرق في الحالتين هو $\binom{10}{4}$

أما إذا كان x, y ليسا ضمن الفريق فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{5}$

وبالتالي فان عدد الطرق الممكنة هو:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5} = 672$$ طريقة

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

إذا كان n عدداً صحيحاً فان:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\ y^k \quad , \quad n \geq 0$$

حالة خاصة

إذا كان $x = 1 , y = 1$ فإن:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \quad , \quad n \geq 0$$

رابعاً: مبدأ برج الحمام The Pigeonhole Principle

نفتــرض قاعــدة غاية في الأهميــة والبســاطة تعــرف باسم مبدأ برج الحمام لدريشلت. هذه القاعدة عرفت باسم العالم الفرنسي بيتر جوستاف ليچيــون دريــشلت Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). ولكن سنشير إليه ببــساطة على أنه مبدأ برج الحمام.

مبدأ برج الحمام بسيط، ولكنه يعد أداة فعالة عند محاولة إثبات أنه يوجد حل لأي مشكلة تركيبية. هذا المبدأ لا يرشدنا إلى كيفية الحصول على حل، ولا يعطينــا عــدد الحلول الممكنة، ولكنه يخبرنا أنه يوجد حل واحد على الأقل للمشكلة المُعالجَة. وينص مبدأ برج الحمام على ما يلي:

إذا وضعت m من الكرات في مجموعة من الــصناديق عــددها n، بحيــث أن $m > n$. فإن واحداً من هذه الصناديق يجب أن يحتوي على كرتين على الأقل.

مثال (٢٥): مجموعة من مستخدمي الحاسب الآلي عددهم m، يريدون استخدام n من أجهزة الحاسب الآلي، بحيث أن $m > n$. فإن طالبين على الأقل يجب أن يستخدموا حاسباً واحداً.

مثال (٢٦): إذا وزعت m حمامة على برج من حمام عدد عيونه n، بحيث أن $m > n$. فإن عيناً واحدة يجب أن تحتوي على حمامتين على الأقل.

مثال (٢٧): مجموعــة من الأشــخاص عددهــم n، فإن شخصين على الأقل لهما نفس يــوم الميــلاد.

تمارين

١ – يعمل في إحدى الشركات 8 مهندسين، 3 فنيين، و24 عاملاً. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس وفني وعامل؟

٢ – أ- كم عدد الكلمات التي يمكن اختيارها من مجموعة الحروف $\{a , b , c , d\}$ والتي طول كل منها 8 حروف؟

– ب – كم عدد الكلمات التي يمكن اختيارها من مجموعة الحروف السابقة والتي طول كل منها 8 حروف على الأكثر؟

٣ – مخزن لأجهزة الحاسب الآلي المصغرة يتاجر في أربعة أنواع من الحاسبات الشخصية، وثلاثة أنواع من شاشات العرض، وستة أنواع من الطابعات، وثمانية أنواع من المودم (المودم هو جهاز اتصال بيانات بين الحاسب وخطوط التليفون). كم عدد التوليفات (الترتيبات) الممكنة؟

٤ – إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها n. أثبت أن عدد المجموعات الجزئية من A هو 2^n.

٥ – كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عدداً زوجياً؟

٦ – جمعية ثقافية تضم 100 عضواً، يقرأ 50 عضواً منهم الصحيفة A، ويقرأ 40 عضواً الصحيفة B، ويقرأ 35 عضواً الصحيفة C، ويقرأ 12 عضواً الصحيفتين A , B، ويقرأ 10 أعضاء الصحيفتين A , C، ويقرأ 11 عضواً الصحيفتين B , C، كما أن 97 عضواً يقرأ كل منهم إحدى هذه الصحف الثلاث على الأقل. أوجد عدد الأعضاء الذين:

أ – لا يقرؤون أية صحيفة؟

ب – يقرؤون جميع الصحف؟

ج – يقرؤون الصحيفتين A , B فقط؟

د – يقرؤون الصحيفة A فقط؟

٧ – في دراسة أجريت على 200 شخص، وجد أن 100 منهم يفضلون مشروب كوكاكولا، و149 منهم يفضلون مشروب بيبسي كولا، و83 منهم يفضلون

مشروب سفن أب، و*80* منهم يفضلون شرب كوكاكولا وبيبسي كولا، و*66* منهم يفضلون مشروب كوكاكولا وسفن أب، و*45* منهم يفضلون مشروب بيبسي كولا وسفن أب، كما أن *12* منهم يفضلون المشروبات الثلاثة. كم عـدد الأشـخاص الذين لا يفضلون أي من المشروبات الثلاثة.

٨ – مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة العلاقة الآتية (وذلك عندما $m \neq 1$):

$$1+m+m^2+m^3+\ \cdots\ m^n=\frac{m^{n+1}-1}{m-1}$$

٩ – إذا كانت المجموعـة $\{A, B, C, \ \ldots \ , Y, Z\}$ هي الأبجديـة الإنجليزيـة وعدد حروفها *26* حرفاً، كمـا أن $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ هـي مجموعة الأرقام العشرية. في إحدى الدول الأوربية تتكون لوحات السيارات من حرفين يتبعها ثلاثة أرقام. المطلوب إيجاد:

أ – اللوحات الكلية.

ب – عدد اللوحات التي أرقامها الثلاثة مختلفة.

ج – عدد اللوحات التي حرفاها مختلفان.

د – عدد اللوحات التي حرفاها مختلفان وأرقامها الثلاثة أيضاً مختلفة.

١٠ – في المملكة العربية السعودية، كانت تتكون لوحات السيارات من ثلاثة أحـرف يتبعها ثلاثة أرقام. المطلوب إيجاد:

أ – عدد اللوحات الكلية.

ب – عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة وأرقامها الثلاثة أيضاً مختلفة.

ج – عدد اللوحات المتشابهة في الحروف والأرقام.

١١ – أوجد عدد الأرقام المختلفة التي يمكن تكوينها من الأعداد $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ بحيث تقع كلها بين *2000* و *4000*.

١٢ – أوجد حل المعادلات الآتية لجميع قيم n:

$$10\, p(n, 1)+2\, p(n, 2)=p(n, 3)$$

١٣ – اثبت صحة العلاقتين الآتيتين:

$$i)\, p(n, n)=p(n, n-1)$$

$$ii)\ \frac{p(n,k)}{k!}=\frac{p(n,n-k)}{(n-k)!}$$

١٤ - أوجد عدد التبديلات الممكنة لحروف كلمة "فاروق" بحيث يبدأ التبديل وينتهي بحرفي العلة (أ ، و).

١٥ - أوجد عدد التبديلات الممكنة لحروف كلمة MATHEMATICS.

١٦ - في الشوط الأول من سباق الخيل يتسابق *10* جياد، وفي الشوط الثاني يتسابق *9* جياد غيرهم، وفي كل شوط توجد ثلاث جوائز مختلفة للجياد الثلاثة الأولى. بكم طريقة يمكن أن تحدث نتيجة الشوطين معاً؟

١٧ - بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ستة أعضاء من بين عشرين طالباً وعشر ضباط في إحدى الكليات العسكرية بحيث تحتوي هذه اللجنة على:

أ - أربعة طلاب بالضبط؟

ب - أربعة طلاب على الأقل وضابط واحد على الأقل؟

١٨ - أثبت صحة العلاقات التالية:

$$a-\ \frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}=\frac{n^2+1}{n!}$$

$$b-\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

$$c-\ \binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

$$d-\ \binom{n+k}{n}=\binom{n+k}{k}$$

$$e-\ \binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}\qquad,\quad j\le k\le n$$

١٩ – بسط بقدر الإمكان كل من ما يأتي:

$$a - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n-1}{k}}$$

$$b - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$$

٢٠ – أثبت أنه إذا كان $n \geq 1$ فإن $\binom{2n}{n}$ عدداً زوجياً.

٢١ – صندوق يحتوي على سبع كرات كل منها ملون بلون مختلف من الألوان السبعة لقوس قزح. بكم طريقة يمكن اختيار أربعة من هذه الكرات بحيث تكون الخضراء إحداها؟

٢٢ – من بين اثنين وعشرين لاعباً لكرة القدم يوجد ثلاثة يمكنهم حراسة المرمى، وسبعة يمكنهم الدفاع فقط، وثمانية يمكنهم اللعب في خط المنتصف للملعب، والأربعة الباقين يمكنهم اللعب في خط الهجوم فقط. أراد المدرب تكوين فريق مؤلف من إحدى عشر لاعباً لخوض المباريات. بكم طريقة يمكن اختيار الفريق بحيث يحتوي على حارس مرمى واحد فقط، وثلاثة للدفاع بالضبط، وخمسة لاعبين لخط المنتصف منهم ثلاثة معينين، ولاعبان لخط الهجوم؟

٢٣ – يراد تكوين لجنة فنية من اثنين من الضباط وثلاثة صف ضابط. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة من بين خمسة ضباط وسبعة صف ضابط:

أ – إذا كان أي ضابط أو أي صف ضابط يمكن أن يدخل اللجنة،

ب – إذا كان أي شخص معين من صف الضباط يجب أن يدخل اللجنة،

ج – إذا استبعد اثنان من الضباط من دخول اللجنة.

٢٤ – مجلس إدارة مؤلف من *11* عضواً، ولمهمة ما، نريد تكوين وفد مؤلف من *5* أعضاء.

أ – بكم طريقة يمكن اختيار الوفد؟

ب - بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا رفضا عضوان أن يكونا معاً في الوفد؟

ج - بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا أصرا عضوان أن يكونا معاً سواء ضمن الوفد أو خارجه؟

٢٥ - إذا كان n , k عددين صحيحين، أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

الفصل الحادي عشر

العلاقات الارتدادية

RECURRENCE RELATIONS

مقدمة Introduction

في سنة ١٢٠٢ م، قام العالم الرياضي فيبوناشي (١١٧٠ م -١٢٥٠ م) Leonardo Fibonacci بطرح مشكلة العد البسيطة التالية:

دعنا نفرض أنه يوجد زوج من الأرانب لا ينتج ذرية أثناء الشهر الأول من حياته، ولكن بعد الشهر الأول ينتج زوج جديد من الذرية كل شهر.

إذا بدأنا بزوج واحد من الأرانب المولود حديثاً، ولو فرضنا أنه لا يوجد وفاة بين الأرانب، كم زوجاً من الأرانب يمكن أن يوجدوا بعد n من الشهور ؟

لحل هذه المشكلة، دعنا نرمز لعدد أزواج الأرانب في نهاية n شهراً بالرمز S_n.

$$\therefore \quad S_0 = 1 \qquad and \qquad S_1 = 2$$

بعد شهرين، الزوج الأول من الأرانب ينتج زوجاً من الذرية، أي أن $S_2 = 2$.
بعد الشهر الثالث، يوجد ثلاث أزواج من الأرانب، أي أن $S_3 = 3$.

بصورة عامة نجد أنه بعد n شهراً تنتج الأرانب:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \qquad , \qquad n \geq 2 \qquad (1)$$

وبالتالي فإن أي حد من حدود المتتابعة:

$$S_0 \; , S_1 \; , S_2 \; , S_3 \; , \cdots , \cdots$$

يساوي مجموع حدين سابقين له . مع الأخذ في الاعتبار أن:

$$S_0 = 1 \quad and \quad S_1 = 1$$

فعلى سبيل المثال يمكن بسهولة حساب الحدود الأولى من المتتابعة كالآتي:

$$1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , \ldots$$

العلاقة (1) تعرف بالعلاقة الارتدادية للمتتابعة:

$$S_0 \; , S_1 \; , S_2 \; , S_3 \; , \cdots , \cdots$$

كما أن S_0 , S_1 يسميان بالشروط الابتدائية للعلاقة الارتدادية (1).

هذه العلاقة تظهر كثيراً في فروع مختلفة كثيرة من الرياضيات والعلوم. على سبيل المثال وعلى نطاق واسع في الفيزياء، علوم الحاسب الآلي، الإحصاء، علم الوراثة، علم النبات، الاقتصاد، وعلوم أخرى كثيرة.

العلاقــات الارتدادية تسمى أيضاً معادلات الفروق. كما أن العلاقة (1) تسمى متوالية فيبوناشي، والأعداد في المتوالية تسمى أعداد فيبوناشي.

مثال (١): أوجد حل العلاقة الارتدادية الآتية:

$$S_n = 2S_{n-1} \qquad n \geq 1 \qquad (2)$$

مع الشرط الابتدائي $S_0 = 1$.

الحل

لحل هذه العلاقة نستبدل n بـــ $(n-1)$، نحصل على:

$$S_{n-1} = 2S_{n-2}$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد أن:

$$S_n = 2(2S_{n-2}) = 2^2 S_{n-2} \qquad (3)$$

ثم نستبدل n بـــ $(n-2)$، نحصل على:

$$S_{n-2} = 2S_{n-3}$$

بالتعويض في العلاقة (3) نجد أن:

$$S_n = 2^2(2S_{n-3}) = 2^3 S_{n-3} \qquad (4)$$

بتكرار هذه العملية نحصل على:

$$S_n = 2^{n-1} S_1 = 2^n S_0 \qquad (5)$$

وفي النهاية نستخدم الشرط الابتدائي $S_0 = 1$ للحصول على الحل:

$$S_n = 2^n \qquad , \qquad n \geq 0$$

وهذا بالطبع معروف أنه عدد المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصـــرها n. والتعويض بهذه الطريقة يسمى التكرار.

مثال (٢): حل العلاقة الارتدادية الآتية:

$$S_n = 2S_{n-1} + 1 \qquad , \qquad n \geq 2 \qquad (6)$$

مع الشرط لابتدائي $S_1 = 1$

الحل

لحل هذه العلاقة نستبدل n بـــ $(n-1)$، نحصل على:

$$S_{n-1} = 2S_{n-2} + 1$$

بالتعويض في العلاقة (6) نجد أن:

$$S_n = 2(2S_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 S_{n-2} + 2 + 1 \qquad (7)$$

نستبدل n بـــ $(n-2)$ نحصل على:

$$S_{n-2} = 2S_{n-3} + 1$$

بالتعويض في العلاقة (7) نجد أن:

$$S_n = 2^2(2S_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 S_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

بتكرار هذه العملية نحصل على:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} S_1$$

باستخدام الشرط الابتدائي $S_1 = 1$

نجد أن:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

وحيث أن:

$$1 , 2 , 2^2 , \cdots , 2^{n-2} , \; 2^{n-1}$$

متوالية هندسية مجموعها:

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

حيث a هو الحد الأول، r هو الأساس، n عدد الحدود.

وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$S_n = 2^n - 1 \qquad , \qquad n \geq 1$$

مثال (٣): أوجد حل العلاقة الارتدادية الآتية:

$$p_n = p_{n-1} + n \qquad , \qquad n \geq 2 \qquad (8)$$

مع الشرط الابتدائي $p_1 = 2$

الحل

نستخدم طريقة التكرار كالآتي:

نستبدل n بـــ $(n-1)$، نحصل على:

$$p_{n-1} = p_{n-2} + (n-1) \qquad (9)$$

بالتعويض في العلاقة (8) نجد أن:

$$p_n = p_{n-2} + n + (n-1) \qquad (10)$$

نستبدل n بـ $(n-2)$ نحصل على:

$$p_{n-2} = p_{n-3} + (n-2)$$

بالتعويض في العلاقة (10) نجد أن:

$$p_n = p_{n-3} + n + (n-1) + (n-2)$$

بتكرار هذه العملية نحصل على:

$$p_n = p_1 + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2$$

باستخدام الشرط الابتدائي $p_1 = 2$

نجد أن:

$$p_n = 2 + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2$$

وحيث أن:

$$1, 2, 3, \cdots, (n-3), (n-2), (n-1), n$$

متوالية حسابية مجموعها:

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n(n+1)}{2}$$

حيث a هو الحد الأول، d هو الأساس، n عدد الحدود. وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \binom{n+1}{2} + 1 \qquad n \geq 1$$

مثال (٤): أوجد حل العلاقة الآتية:

$$-(\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

مع الشرط الابتدائي:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \quad , \quad n = 0$$

ثم استخدم العلاقة: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

الحل متروك للقارئ.

أولاً: العلاقات الارتدادية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانيـــة ذات المعاملات الثابتة

Second Order Linear Homogeneous Recurrence Relations with Constant Coefficients

للأسف لا توجد طريقة عامة يمكن اســتخدامها لحـــل كـــل أنـــواع العلاقـــات الارتدادية. ومع ذلك، هناك أنواع مهمة كثيرة من العلاقات الارتدادية نستطيع حلهـــا. وهذه الأنواع تشمل علاقة فيبوناشي الارتدادية.

تعريف

العلاقة الارتدادية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانيـــة ذات المعاملات الثابتـــة تأخذ الصورة الآتية :

$$S_n = a\,S_{n-1} + b\,S_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \qquad s.t. \quad a, b \text{ are constants}$$

ملاحظات

العلاقة الارتدادية الخطية: تعني أن العلاقـــة لا تحتـــوي على أي أس أو ضرب عدد من حدود المتتابعة S_n في بعضها. على سبيل المثال:

العلاقة الارتدادية $S_n = S^2_{n-1} + S_{n-2}$ علاقة غير خطية.

العلاقة الارتدادية المتجانسة: تعني أنه لا يوجد حد ثابت في العلاقـــة. علـــى ســـبيل المثال:

العلاقة الارتدادية $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + 1$ علاقة غير متجانسة.

الرتبة الثانية: تعني أنه يوجد حدين اثنين فقط في الطرف الأيمن من العلاقة.

وبالتالي فإن علاقة فيبوناشي الارتدادية تكون خطية متجانسة من الرتبة الثانيـــة ذات معاملات ثابتة.

<u>**طريقة حل العلاقة الارتدادية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانيـــة ذات المعاملات الثابتة**</u>

لحل العلاقة الارتدادية:

$$S_n = a\,S_{n-1} + b\,S_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \qquad \text{(I)}$$

ذات الشروط الحدية: $S_0 = u \quad , \quad S_1 = v$

نأخذ التعويض $S_n = r^n$ في العلاقة (I)، حيث r مقدار ثابت.

$$\therefore \; r^n = a r^{n-1} + b r^{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow \; r^2 = a r + b \;\; \Rightarrow \;\; r^2 - a r - b = 0$$

أي أنه يمكن أن يكون r حلاً للمعادلة الآتية:

$$x^2 - a x - b = 0 \qquad \textbf{(II)}$$

وبالتالي فإن $S_n = r^n$ تكون حلاً للعلاقة الارتدادية (I).

المعادلة (II) تسمى المعادلة المميزة للعلاقة الارتدادية (I) وحلها يسمى الجذور المميزة لها.

وهناك حالتين للحل ألا وهما:

أ – إذا كانت المعادلة المميزة لها جذران مختلفان هما $r_1 \; , \; r_2$ ، فإن حل العلاقة (I) يعطى كالآتي:

$$S_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

حيث المعاملين $c_1 \; , \; c_2$ يحددان من الشروط الابتدائية.

ب – إذا كانت المعادلة المميزة لها جذر واحد فقط هو r، فإن حل العلاقة (I) يعطى كالآتي:

$$S_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

حيث المعاملين $c_1 \; , \; c_2$ يحددان من الشروط الابتدائية.

مثال (٥): أوجد حل العلاقة الارتدادية:

$$S_n = 2 S_{n-1} + 3 S_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

مع الشرط الابتدائي:

$$S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = 8$$

الحل

المعادلة المميزة لهذه العلاقة هي:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

وبالتالي فإن جذرا هذه المعادلة هما:

$$(x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1 \quad and \quad r_2 = 3$$

إذن حل العلاقة الارتدادية هو:

$$S_n = c_1(-1)^n + c_2(3)^n$$

لإيجاد المعاملين c_1 , c_2 نستخدم الشرط الابتدائي كالآتي:

عندما $n = 0$ نحصل على:

$$S_0 = c_1 + c_2 \;\; , \;\; S_0 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

عندما $n = 1$ نحصل على:

$$S_1 = -c_1 + 3c_2 \;\; , \;\; S_1 = 8$$

$$\Rightarrow \;\; -c_1 + 3c_2 = 8 \qquad \text{(ii)}$$

بحل المعادلتين (i) ، (ii) معاً نجد أن:

$$c_1 = -2 \quad , \quad c_2 = 2$$

ومن ثم فإن الحل العام هو:

$$S_n = -2(-1)^n + 2(3)^n \quad , \quad n \geq 0$$

مثال (٦): أوجد الحل العام للعلاقة الارتدادية:

$$S_n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

مع الشرط الابتدائي:

$$S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 1$$

الحل

المعادلة المميزة للعلاقة الارتدادية هي:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

وبالتالي فإن جذرا هذه المعادلة هما:

$$(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

إذن حل العلاقة الارتدادية هو:

$$S_n = c_1 (2)^n + c_2\, n (2)^n$$

لإيجاد المعاملين c_1 , c_2 نستخدم الشرط الابتدائي كالآتي:

عندما $n = 0$ نحصل على:

$$S_0 = c_1 \quad , \quad S_0 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = 1 \qquad \text{(i)}$$

عندما $n = 1$ نحصل على:

$$S_1 = 2c_1 + 2c_2 \quad , \quad S_1 = 1$$

$$\Rightarrow \; 2c_1 + 2c_2 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

بحل المعادلتين (i) ، (ii) معاً نجد أن:

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

ومن ثم فإن الحل العام هو:

$$S_n = 2^n - \frac{n}{2} 2^n = 2^n \left(1 - \frac{n}{2} \right) \quad , \quad n \geq 0$$

مثال (٧): أوجد الحل العام لعلاقة فيبوناشي الارتدادية:

الحل

حيث إن علاقة فيبوناشي هي :

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

مع الشرط الابتدائي:

$$S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 1$$

المعادلة المميزة للعلاقة الارتدادية هي:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

وبالتالي فإن جذرا هذه المعادلة هما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

أي أن الجذرين هما:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

إذن حل علاقة فيبوناشي الارتدادية هي:

$$S_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

لإيجاد المعاملين $c_1 \, , \, c_2$ نستخدم الشرط الابتدائي كالآتي:

عندما $n = 0$ نحصل على:

$$S_0 = c_1 + c_2 \quad , \quad S_0 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{(i)}$$

عندما $n = 1$ نحصل على:

$$S_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad , \quad S_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad \text{(ii)}$$

بحل المعادلتين (i)، (ii) نجد أن:

$$c_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \quad , \quad c_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$$

ومن ثم فإن الحل العام لعلاقة فيبوناشي الارتدادية هو:

$$S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \quad , \quad n \ge 0$$

ويمكن التحقق من أن الشرط الابتدائي صحيح عندما $n = 0 \, , \, 1$. كما أنه يمكن تحقيق التعويض ثانية.

ثانياً: الدوال المولدة والعلاقات الارتدادية

Generating Functions and Recurrence Relations

في هذا الجزء سنناقش طريقة أخرى لحل العلاقات الارتدادية تستند على مفهوم يعرف بالدالة المولدة. وفيما يلي سنحاول تعريف هذا المفهوم.

تعريف

نفرض أن $S_0 , S_1 , S_2 , \cdots , S_n , \cdots$ متتابعة من الأعداد. فتكون الدالة المولدة لهذه المتتابعة تأخذ التعبير الآتي :

$$g(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_n x^n + \cdots \qquad (G)$$

على سبيل المثال

الدالة المولدة للمتتابعة $1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , \ldots$ هي:

$$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

التعبير الذي في الطرف الأيمن من العلاقة (G) يعرف على أنه « متتابعة القوى الأساسية ».

لحلول أمثلة تطبيقية على الدالة المولدة والعلاقات الارتدادية، يجب ذكر بعض الحقائق الهامة التالية:

إذا كان m أي عدد صحيح موجب، فإن:

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

إذا كانت $m = 1$ فإن:

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

إذا كانت $m = 2$ فإن:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

إذا كانت $m = 3$ فإن:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + \cdots$$

مثال (٨): مستخدماً الدالة المولدة، أوجد حل العلاقة الارتدادية:

$$S_n = 2S_{n-1} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$$

الحل

يمكن كتابة العلاقة الارتدادية على الصورة:

$$S_n - 2S_{n-1} = 0 \qquad \textbf{(F)}$$

وحيث إن الدالة المولدة هي:

$$g(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_n x^n + \cdots$$

$$\therefore \; 2x\,g(x) = 2S_0 x + 2S_1 x^2 + 2S_2 x^3 + \cdots + 2S_{n-1} x^n + \cdots$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد أن:

$$g(x) - 2x\,g(x) = S_0 + (S_1 - 2S_0)\,x + (S_2 - 2S_1)\,x^2$$

$$+ \cdots + (S_n - 2S_{n-1})\,x^n + \cdots$$

وطبقاً لتعريف العلاقة الارتدادية (F) ، نجد أن معاملات $x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$ جميعها تساوي الصفر. وبالتالي فإن:

$$g(x) - 2x\,g(x) = S_0 = 1 \qquad \Rightarrow (1-2x)g(x) = 1$$

$$\Rightarrow \; g(x) = \frac{1}{1-2x}$$

$$\therefore \; g(x) = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots + (2x)^n + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots$$

وبالتالي فإن الحل العام هو : $S_n = 2^n$

وهذه النتيجة مطابقة للنتائج السابقة.

مثال (٩): مستخدماً الدالة المولدة، أوجد حل العلاقة الارتدادية:

$$S_n = S_{n-1} + 2 \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$$

الحل

العلاقة الارتدادية يمكن كتابتها على الصورة الآتية:

$$S_n - S_{n-1} - 2 = 0 \qquad \textbf{(H)}$$

وحيث إن الدالة المولدة هي:

$$g(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_n x^n + \cdots$$

$$\therefore \; x\, g(x) = S_0 x + S_1 x^2 + S_2 x^3 + \cdots + S_{n-1} x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\therefore \; \frac{2}{(1-x)} = 2 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n + \cdots$$

بطرح المعادلة الثانية والثالثة من الأولى نجد أن:

$$g(x) - x\,g(x) - \frac{2}{1-x} = (S_0 - 2) + (S_1 - S_0 - 2)\,x + (S_2 - S_1 - 2)\,x^2$$

$$+ \cdots + (S_n - S_{n-1} - 2)\,x^n + \cdots$$

وطبقاً لتعريف العلاقة الارتدادية (H)، نجد أن معاملات $x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$ جميعها تساوي الصفر. وبالتالي فإن:

$$g(x) - x\,g(x) - \frac{2}{1-x} = S_0 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow (1-x)\,g(x) = -1 + \frac{2}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \; g(x) = (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n) + \cdots$$

$$+\ x\left(1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n\right)+\cdots$$

$$\Rightarrow\ g(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

$$+\ x+2x^2+3x^3+\cdots+n\,x^n+\cdots$$

$$=1+3x+5x^2+\cdots+(2n+1)x^n+\cdots$$

وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$S_n=2n+1$$

مثال (١٠): باستخدام الدالة المولدة، أوجد حل العلاقة الارتدادية:

$$S_n=-2\,S_{n-1}-S_{n-2}\ ,\quad S_0=0\ ,\quad S_1=1\ ,\quad n\geq 2$$

الحل

العلاقة الارتدادية يمكن كتابتها على الصورة الآتية:

$$S_n+2\,S_{n-1}+S_{n-2}=0 \qquad \text{(K)}$$

وحيث إن الدالة المولدة هي:

$$g(x)=S_0+S_1x+S_2x^2+\cdots+S_nx^n+\cdots$$

$$\therefore\ 2x\,g(x)=2S_0\,x+2S_1\,x^2+2S_2\,x^3+\cdots+2S_{n-1}\,x^n+\cdots$$

كما أن:

$$x^2\,g(x)=S_0\,x^2+S_1\,x^3+S_2\,x^4+\cdots+S_{n-2}\,x^n+\cdots$$

بجمع المعادلات الثلاث نجد أن:

$$g(x)+2x\,g(x)+x^2\,g(x)=S_0+(S_1+2S_0)x+(S_2+2S_1+S_0)\,x^2$$

$$+\cdots+(S_n+2S_{n-1}+S_{n-2})\,x^n+\cdots$$

وطبقاً لتعريف العلاقة الارتدادية (K)، نجد أن معاملات $x,x^2,x^3,\cdots,x^n,\cdots$ جميعها تساوي الصفر. وبالتالي فإن:

$$g(x)+2x\,g(x)+x^2\,g(x)=S_0+(S_1+2S_0)x$$

$$\Rightarrow\ (1+2x+x^2)g(x)=S_1\,x=x$$

$$\Rightarrow\ g(x)=\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{x}{[1-(-x)]^2}$$

$$\Rightarrow\ g(x)=x\,[\,1+2(-x)+\ 3(-x)^2+\ \cdots+\ (n+1)(-x)^n+\cdots\,]$$

$$=x-2x^2+\ 3x^3+\ \cdots+(-1)^{n-1}\,n\,x^n+\cdots$$

وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$S_n=(-1)^{n-1}\,n=\begin{cases} n & ,\quad n \text{ is odd} \\ -n & ,\quad n \text{ is even} \end{cases}$$

تمارين

١ - نفرض أن:

$$S_n = 3S_{n-1} + nS_{n-2} + 4 \qquad , \qquad n \geq 2$$

مع الشرط الابتدائي:

$$S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 2$$

أحسب:

$$S_3 \;,\; S_4 \;,\; S_5 \;,\; S_6 \text{ and } S_7$$

٢ - نفرض أن:

$$S_n = nS_{n-1} + S^2{}_{n-2} + S_{n-3} \qquad , \qquad n \geq 3$$

مع الشرط الابتدائي:

$$S_0 = 1 \;,\; S_1 = 2 \;,\; S_2 = 3$$

أحسب:

$$S_3 \;,\; S_4 \;,\; S_5 \text{ and } S_6$$

٣ - أوجد حل العلاقات الارتدادية الآتية:

i) $S_n = aS_{n-1} \;,\; S_0 = b \;,\; n \geq 1$

ii) $S_n = nS_{n-1} \;,\; S_0 = 1 \;,\; n \geq 1$

iii) $p_n = 2n\,p_{n-1} \;,\; p_0 = 1 \;,\; n \geq 1$

iv) $S_n = (n+1)S_{n-1} \;,\; S_0 = a \;,\; n \geq 1$

v) $p_n = (2n-1)\,p_{n-1} \;,\; p_0 = 1 \;,\; n \geq 1$

vi) $S_n = S_{n-1} + \binom{n}{2} \;,\; S_1 = 1 \;,\; n \geq 2$

$vii)\ S_n = 4S_{n-1} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 2 \quad , \quad n \geq 2$

٤ – أوجد حل العلاقات الارتدادية الآتية:

$1)\ S_n = 3S_{n-1} - 2S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = 1 \quad , \quad n \geq 2$

$2)\ S_n = 2S_{n-1} + 3S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 5 \quad , \quad n \geq 2$

$3)\ S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2} \quad , \quad S_0 = a \quad , \quad S_1 = b \quad , \quad n \geq 2$

$4)\ S_n = -4S_{n-1} + 4S_{n-2} \quad , \quad S_0 = -2 \quad , \quad S_1 = 2 \quad , \quad n \geq 2$

$5)\ S_n = -3S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 1 \quad , \quad n \geq 2$

$6)\ S_n = 2S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = 5 \quad , \quad n \geq 2$

$7)\ S_n = 16S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = 1 \quad , \quad n \geq 2$

$8)\ S_n = 2S_{n-2} \quad , \quad S_0 = a \quad , \quad S_1 = b \quad , \quad n \geq 2$

$9)\ S_n = 3S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = 0 \quad , \quad n \geq 2$

$10)\ S_n = 2\sqrt{2}\,S_{n-1} - 2S_{n-2} \quad , \quad S_0 = \sqrt{2} \quad , \quad S_1 = \sqrt{2} \quad , \quad n \geq 2$

٥ – أوجد الدالة المولدة للعلاقات الارتدادية الآتية، ثم أوجد حل هذه العلاقات باستخدام الدالة المولدة:

$1)\ S_n = 3S_{n-1} \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad n \geq 1$

$2)\ S_n = -2S_{n-1} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$

3) $S_n = S_{n-1} + 3 \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$

4) $S_n = S_{n-1} - 1 \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$

5) $S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = 1 \quad , \quad n \geq 2$

6) $S_n = -2S_{n-1} - S_{n-2} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad S_1 = -2 \quad , \quad n \geq 2$

7) $S_n = 3S_{n-1} - 3S_{n-2} + S_{n-3} \ , \ S_0 = S_1 = 0 \ , \ S_2 = 1 \ , \ n \geq 3$

8) $S_n = 2S_{n-1} + 4^{n-1} \quad , \quad S_0 = 1 \quad , \quad n \geq 1$

حلول تمرين (٥)

1) $g(x)=\dfrac{1}{1-3x}$ $\qquad S_n=3^n$

2) $g(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ $\qquad S_n=(-2)^n$

3) $g(x)=\dfrac{1+2x}{(1-x)^2}$ $\qquad S_n=3n+1$

4) $g(x)=\dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$ $\qquad S_n=1-n$

5) $g(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ $\qquad S_n=n$

6) $g(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad S_n=(-1)^n(n+1)$

7) $g(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$ $\qquad S_n=\dbinom{n}{2}$

8) $g(x)=\dfrac{1-3x}{(1-2x)(1-4x)}$

$$=\frac{1/2}{(1-2x)}+\frac{1/2}{(1-4x)}$$

$$S_n=\frac{(2^n+4^n)}{2}$$

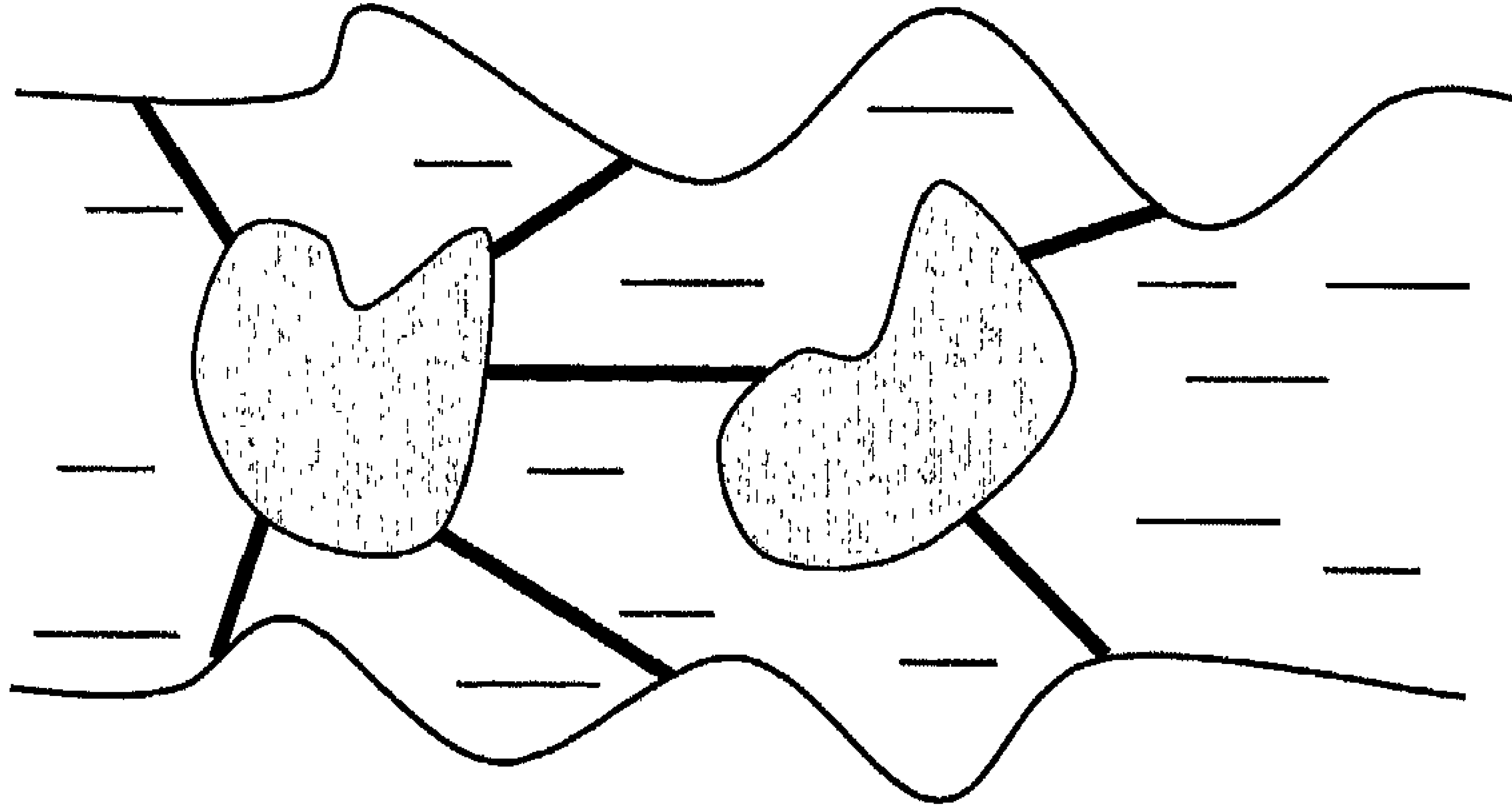
الفصل الثاني عشر

مقدمة إلى نظرية الرسومات

AN INTRODUCTION TO GRAPH THEORY

مقدمة Introduction

في سنة 1736 م، كان هناك مشكلة صغيرة لدى سكان مدينة Konigsberg نيسبرج والتي تسمى الآن كالنينجراد Kaliningrad، وتقع هذه المدينة في اتحاد الجمهوريات السوفيتية الاشتراكية Union of Soviet Socialist Republics (USSR) سابقاً، وهذه المشكلة هي أن أحياء مدينتهم تنتشر على جانبي نهر بريجل Pregel، وتشتمل أيضاً على جزيرتين في النهر، كما يوضحها الشكل الآتي:

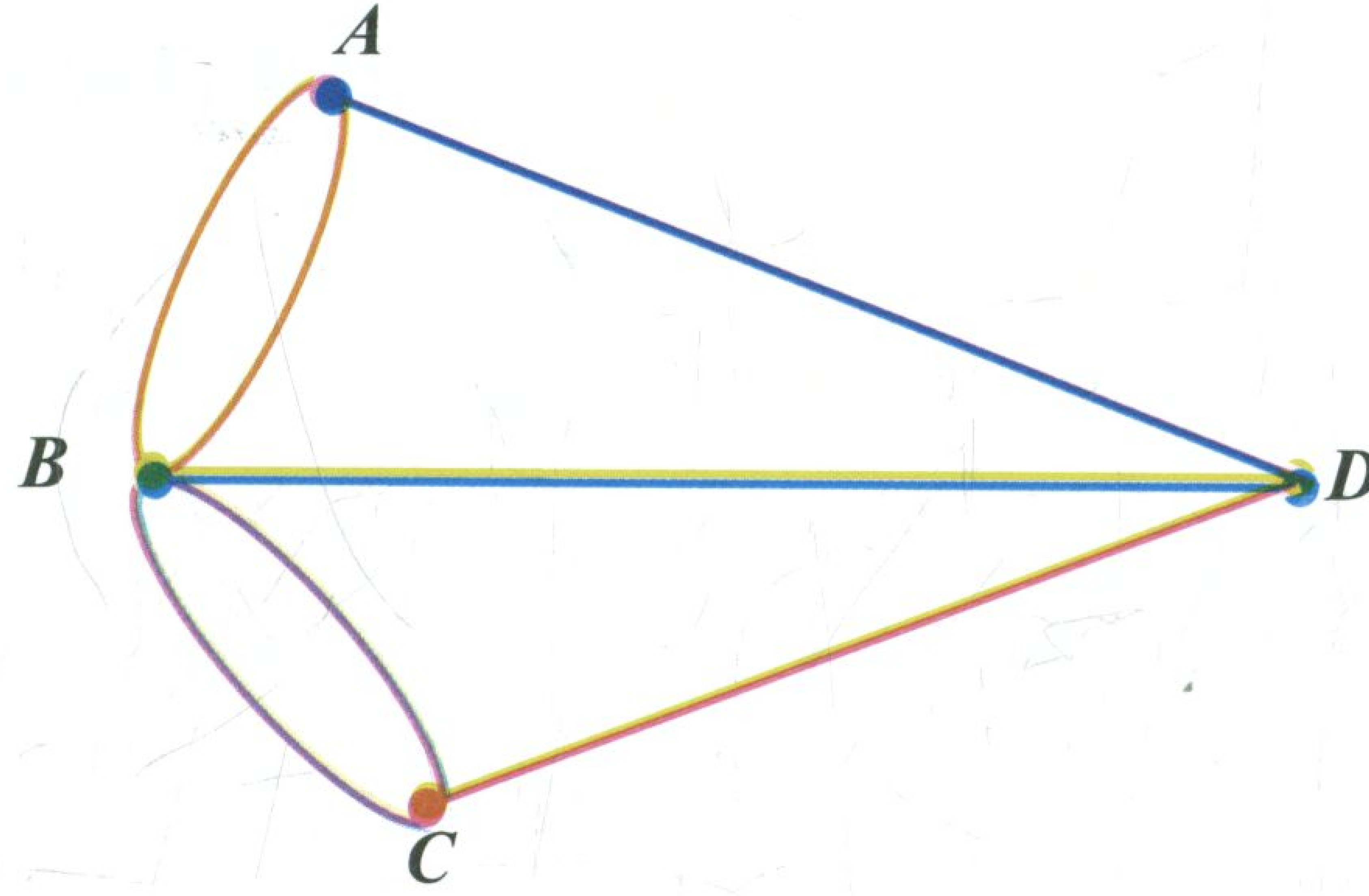


من الرسم نرى أن، ترتبط أحياء هذه المدينة مع بعضها بوساطة سبعة جسور Bridges.

في هذا الوقت، سكان هذه المدينة أرادوا أخذ مماشي مختلفة. السؤال الذي يطرح نفسه، كيف يمكن لشخص من السكان أن يبدأ من بيته في رحله لعبور كل من الجسور السبعة مرة واحدة فقط (أي دون المرور على جسر واحد أكثر من مرة) ويعود مرة أخرى إلى بيته؟

بوضوح، ولا شخص في المدينة وصل لحل هذه المشكلة. لكن العالم الرياضي السويسري ليونارد أويلر Leonard Euler (1707 – 1783)، وصل لحل هذه المشكلة، ونشر هذا الحل في بحث سنة 1736.

فكرة أويلر غاية في البساطة والسهولة. استبدل خريطة المدينة بالرسم الآتي:



شكل (١)

شكل (١) يوضح أن النقطتين A , C يمثلان ضفتي النهر، أما النقطتين B , D يمثلان الجزيرتين، الخطوط السبعة المرتبطة بهذه النقاط تمثل الجسور السبعة.

أويلر يعرض مشكلة جسر نيسبرج Konigsberg bridge problem ، كما يسميها، بالطريقة الآتية:

هل يوجد إمكانية للبدء من أي نقطه من النقاط الأربعة A , B , C , D لعبور كل مسارات الشكل مرة واحدة فقط، والعودة لنقطة البداية؟

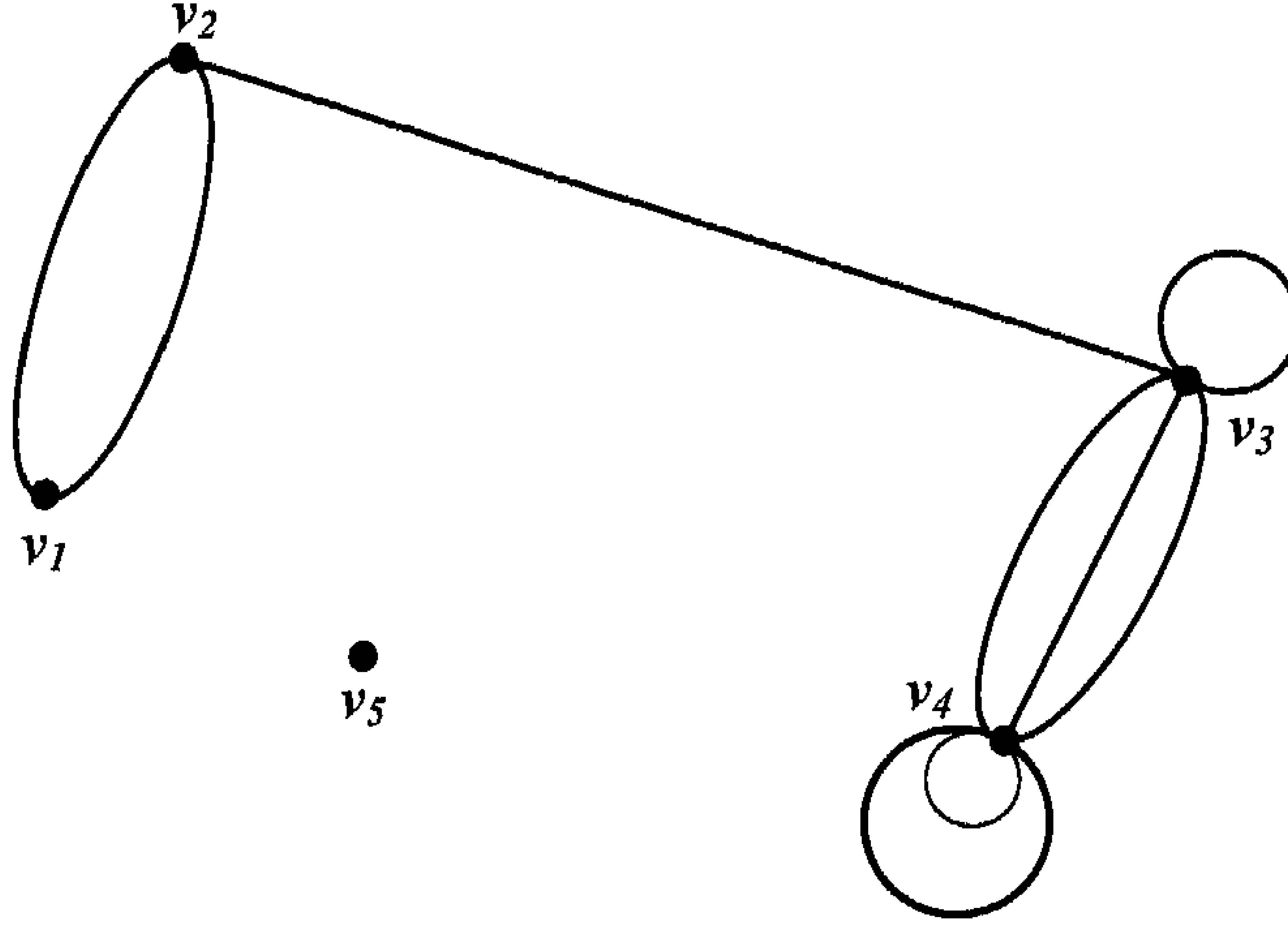
أويلر أثبت أن إجابة هذا السؤال « لا » فما هو السبب؟

شكل (١) يسمى رسم graph، ويُعْتَبَر بحث أويلر بداية لفرع جديد من فروع الرياضيات يسمى « نظرية الرسومات Graph theory ».

ومن أهم الأسباب الباعثة على الاهتمام بنظرية الرسومات هو قابليتها للتطبيق في مجالات مهمة ومختلفة مثل: علوم الحاسب الآلي، الفيزياء، الكيمياء، الهندسة، علم ألأحياء، العلوم الاجتماعية، الاقتصاد، بحوث العمليات، تخطيط المدن، علم اللغة، العلوم العسكرية، وعلوم أخرى كثيرة. وفي هذا الجزء من المقرر نُعَرِّف بعض المفاهيم الأساسية لهذا الفرع المهم من الرياضيات.

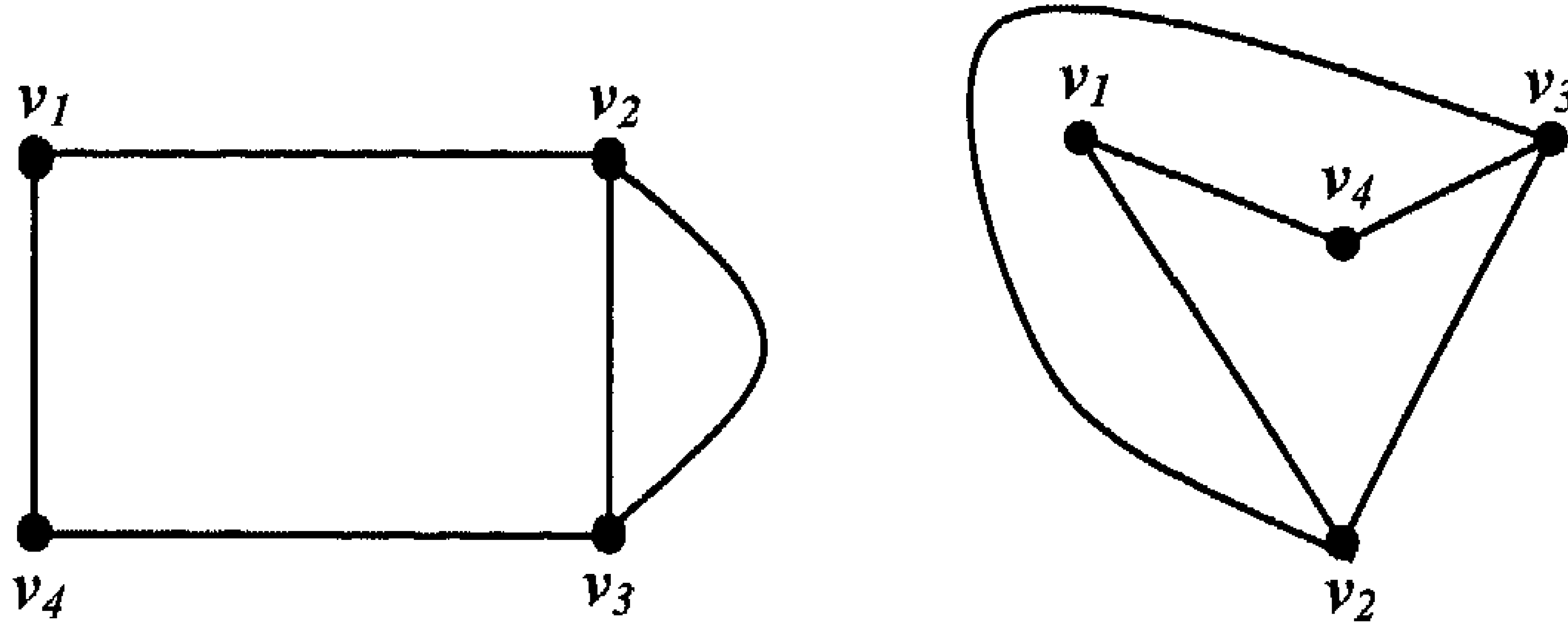
دعنا نبدأ دراستنا لنظرية الرسومات بتعريف الرسم. الكلام البديهي، نريد رسم مجموعة من النقاط، مع مجموعة من المسارات التي تربط بين زوج من هذه النقاط، ويمكن أن يكون هناك أكثر من مسار يربط بين نفس النقطتين، كما في شكل(١)،

ويمكن أن يكون هناك مساراً أيضاً يربط بين النقطة ونفسها، ويشكل عُقْدَة (عُــرْوَة – حَلَقَة – دَوَّارَة Loop). فعلى سبيل المثال المخطط الآتي يمثل رسم:



شكل (٢)

التفاصيل الدقيقة لطريقة رسم المخطط السابق غير مهمة. ولكن المهم هو نقــاط الرسم وعدد المسارات التي تربط هذه النقاط (مشتملة الدَوَّارَة). مــثلاً المخططــان التاليان يمثلان نفس الرسم بالضبط لأن الرؤوس والحواف هي نفسها:



الصورة المهمة لشكل (٢) يمكن وصفها بمجموعة النقاط الآتية

$$V = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 \}$$

ومجموعة مسارات متعددة كالآتي:

$$E = \{\{v_1 , v_2\} , \{v_1 , v_2\} , \{v_2 , v_3\} , \{v_3\} ,$$

$$\{v_3 , v_4\} , \{v_3 , v_4\} , \{v_3 , v_4\} , \{v_4\} , \{v_4\}\}$$

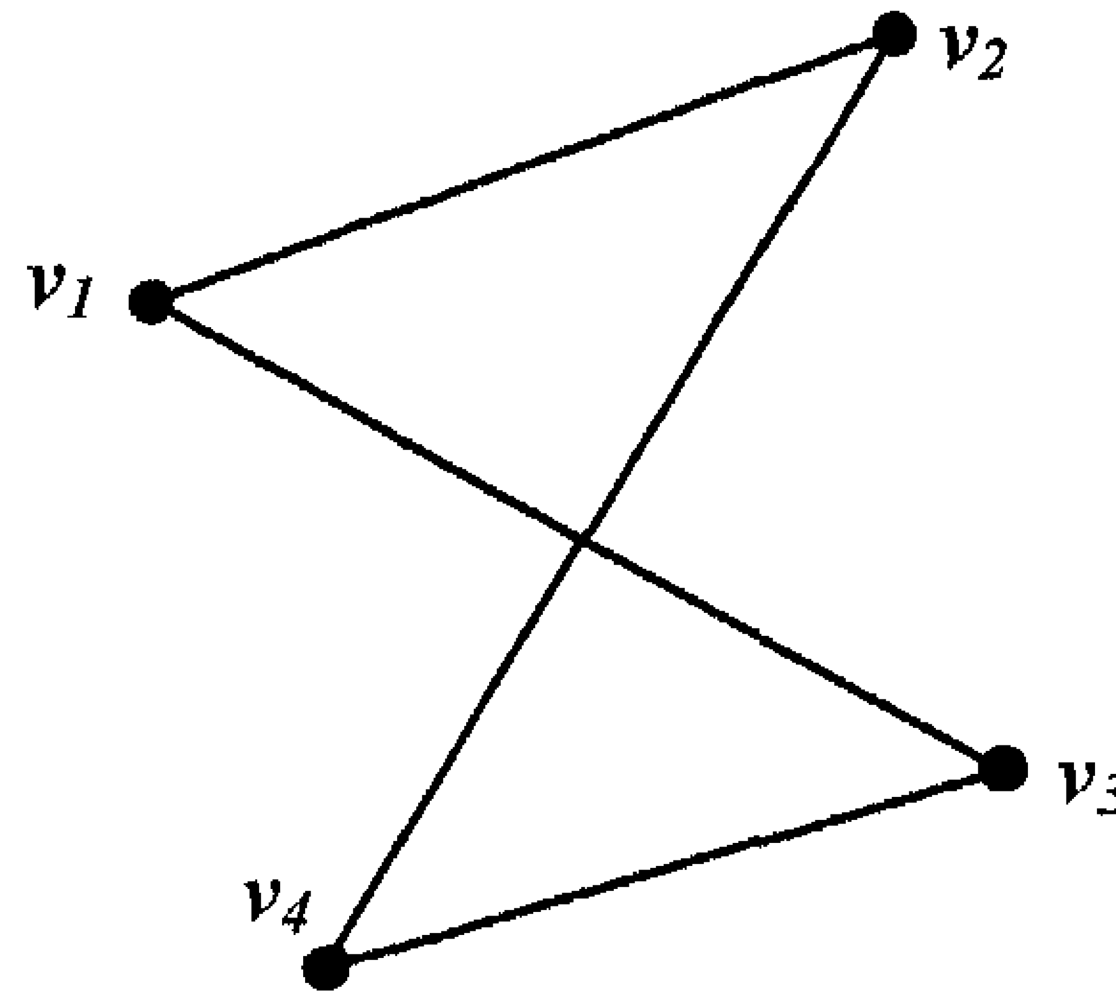
عناصر المجموعة V تسمى رؤوساً Vertices ، أو نقط التقاء Nodes للرسم، وعناصر المجموعة E تسمى حواف Edges (حروف – أضلاع). الحافة $\{v\}$ تسمى دَوَّارة Loop (عُقْدَة – عُرْوَة) عند النقطة v. والآن يمكن إعطاء صيغة لتعريف الرسم.

أولاً: الرسم The Graph

الرسم $G=(V\ ,\ E)$ هو زوج مرتب من $V\ ,\ E$ حيث V مجموعة منتهية غير خالية، E هي مجموعة متعددة من المجموعات الجزئية من V كل منها عدد عناصرها 1 أو 2. عناصر V تشير إلى الرؤوس للرسم، وعناصر E تشير إلى الحواف أو الأضلاع للرسم، الحافة التي في الصورة $\{v\}$، حيث v رأساً تسمى دَوَّارَة (عُرْوَة – عُقْدَة) عند v. سوف نرمز لمجموعة الرؤوس للرسم G بالرمز $\vartheta(G)$ والمجموعة المتعددة من الحواف للرسم G بالرمز $\mathcal{E}(G)$.

إذا كان الرسم يحتوي على أكثر من حافة مرتبطة بزوج من الرؤوس، كما في شكل (٢)، في هذه الحالة نقول أن الرسم متعدد الحواف Multiple edges.

أما إذا كان الرسم غير متعدد الحواف ولا يحتوي على عُقَد فإنه يسمى رسماً بسيطاً Simple graph. الرسم الآتي يمثل نقطة هامة حول طريقة تخطيط الرسومات:



شكل (٣)

نلاحظ من الرسم أن هناك حافتين تتقاطعان عند نقطة بخلاف الرؤوس. ففي هذه الحالة يحتوي الرسم على أربعة رؤوس فقط هي $v_4\ ,\ v_3\ ,\ v_2\ ,\ v_1$. في الحقيقة شكل (٣) يمكن أن يأخذ الرسم الآتي:



أي أن حواف هذا الرسم تتقاطع فقط عند الرؤوس.

مثال (١)

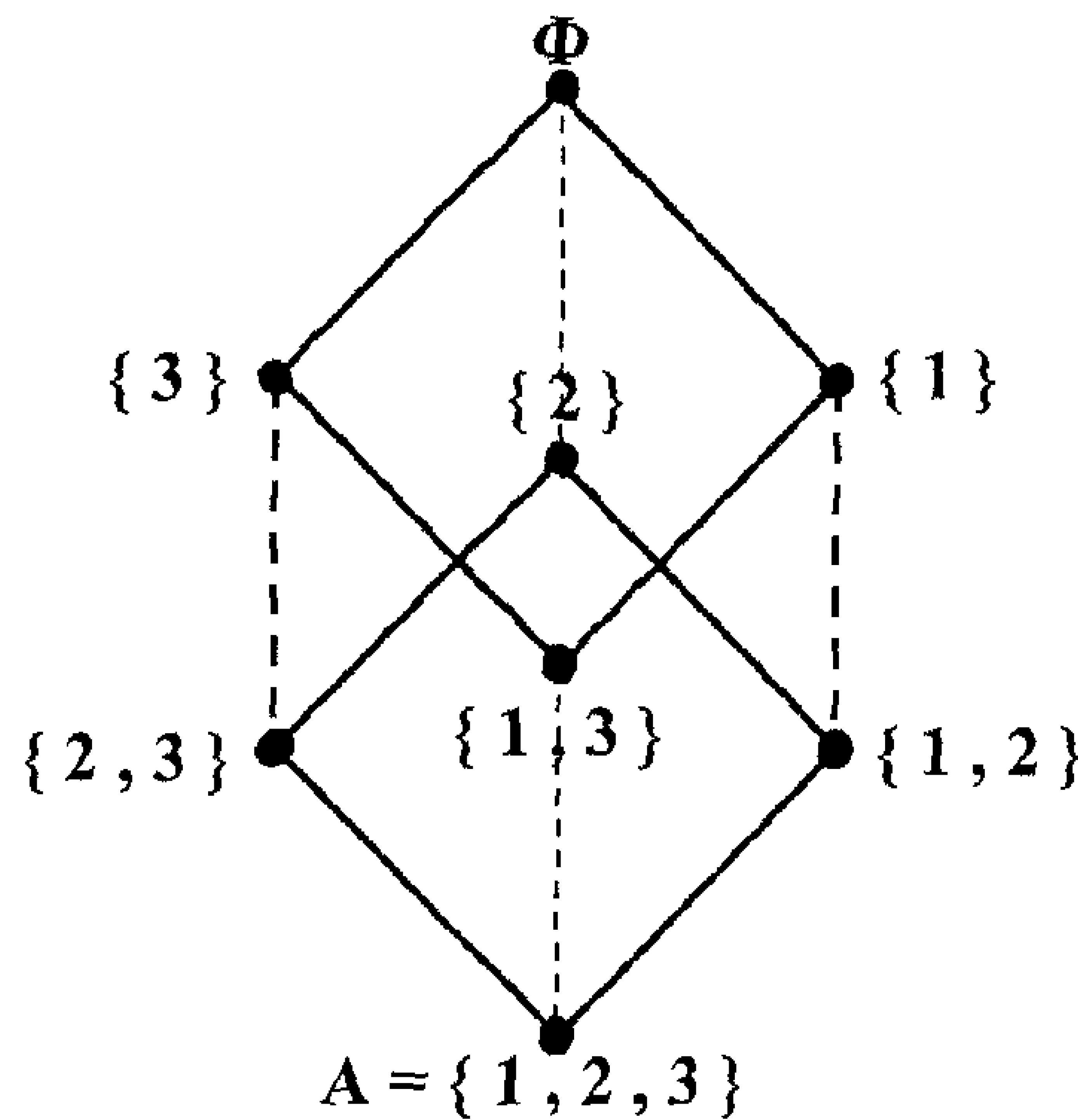
أ - الرسومات يمكن استخدامها لتمثيل خطوط الاتصالات. فكل رأس تمثل دولة معينة، وكل حافة تمثل خط تليفون مباشر بين الحكومات.

ب - الرسومات يمكن استخدامها لتمثيل طرق المواصلات. فكل رأس تمثل مدينة وكل حافة تمثل الطريق السريع الذي يربط بين مدينتين.

ج - بنفس الطريقة، الرسومات يمكن استخدامها لوصف خطوط الطيران، خطوط البريد، خطوط القطارات، وهكذا.

د - الرسومات يمكن استخدامها لوصف علاقات أنواع كثيرة. أحد هذه الأمثلة المهمة والشائعة هو شجرة العائلة، وفي هذه الحالة تمثل الرؤوس أفراد العائلة. ويوجد حافة تربط بين كل عضوين من أفراد العائلة. وهذا النوع من الرسم، والذي يصف العلاقات يسمى رسم المعرفة الشخصية Acquaintance graph.

مثال (٢): الرسومات يمكن أن تكون مفيدة جداً في فروع أخرى من الرياضيات. على سبيل المثال يمكن أن تُستخدم الرسومات لتمثيل مجموعة القوة (مجموعة كل المجموعات الجزئية) بطريقة مرتبة للمجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ كالآتي:

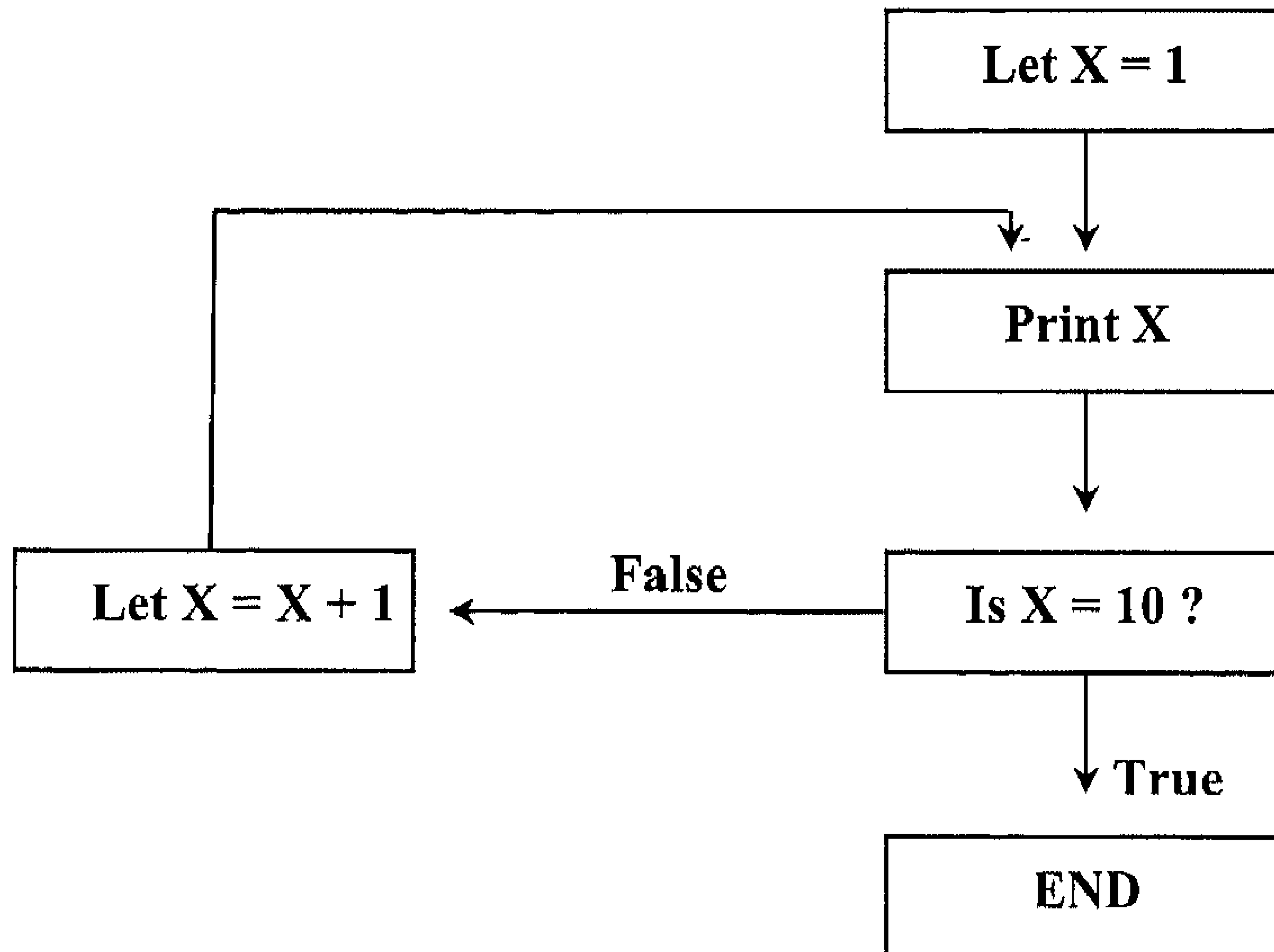


نلاحظ أنه يوجد حافة تربط بين مجموعتين جزئيتين Y , X من A إذا وفقــط إذا كان X مجموعة جزئية من Y. وهذا الرسم يعتبر رسماً بسيطاً.

مثال(٣): المثال التالي سوف يعطينا فكرة عن أهمية مفهوم الرسومات، وخاصة في علم الحاسب الآلي. وهذه الفكرة توضحها خريطة التدفق لبرنامج البيسك Basic وهو بناء العداد من 1 إلى 10 كالآتي:

```
10 LET X = 1
20 REM LOOP
30 PRINT X
40 IF X = 10 THEN 70
50 LET X = X + 1
60 GO TO 30
70 END
```

وهذا المثال توضحه خريطة التدفق (الانسياب) Flow chart الآتية:



١/١- الرأسان المتجاوران Adjacent Vertices

الرأس v_1 تسمى مجاورة adjacent للرأس v_2 إذا كانت المجموعة $\{v_1 , v_2\}$ حافة في الرسم G. كما أن الرأس v تكون مجاورة لنفسها إذا وفقط إذا وجدت عُقْدَة عند الرأس v.

٢/١- الحافتان المتجاورتان Adjacent Edges

الحافتان في الرسم G تسميان متجاورتين إذا كانتا تتقاسمان نفس الرأس.

إذا كانت v رأساً في الرسم G، وكانت e حافة في الرسم G، فإننا نقول أن v رأساً ساقطة Incident على الحافة e إذا كانت e إما عقدة عند v أو e تأخذ الصورة $e = \{v, w\}$ لأي رأس أخرى w في الرسم G. وفي هذه الحالة نقول أن الحافة e ساقطة على الرأس v.

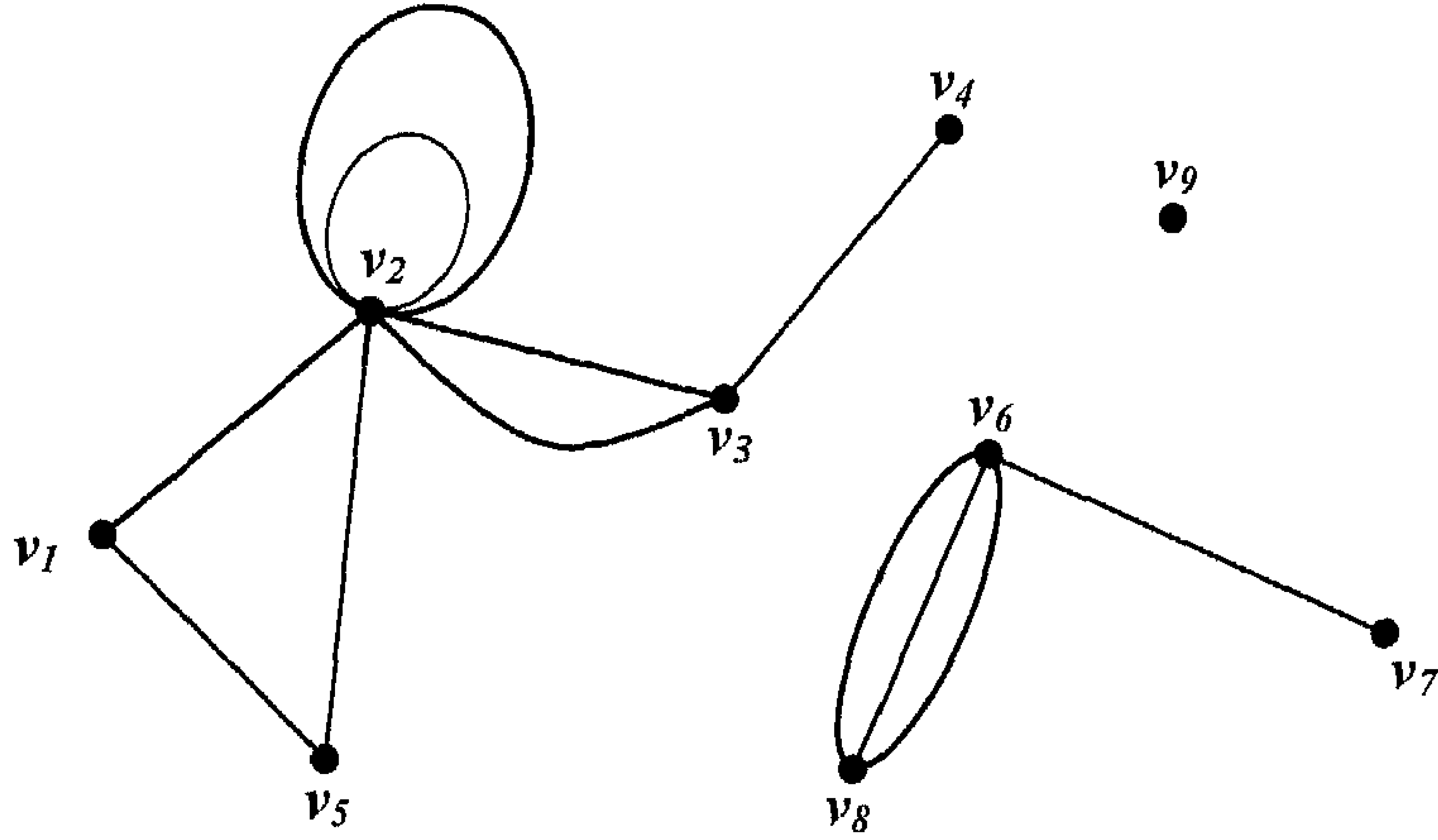
خلاصة القول، الرأس v تكون ساقطة على الحافة e عندما تكون الرأس v هي أحد الرؤوس المرتبطة بالحافة e.

٣/١- درجة الرؤوس The Degree of Vertices

درجة الرأس v، والتي يرمز لها بالرمز $deg\, v$ هي عدد المرات التي تلتقي فيها حواف الرسم G مع الرأس v. وهذا العدد مختلف عن عدد المرات التي تسقط فيها أضلاع (حواف) الرسم G على v. وذلك لأن العروة تلتقي مع الرأس v مرتين.

الرأس التي من الدرجة صفر ليس لها حواف ساقطة عليها، وتسمى الرأس المنعزلة Isolated vertex.

دعنا نمثل هذه المفاهيم بالرسم الآتي:



- الرأسان v_1, v_2 متجاورتان، ولكن الرأسين v_1, v_3 غير متجاورتين.
- الحافتان $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ متجاورتين. أما الحـــافتين $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}$ فهما غير متجاورتين.
- الرأسان v_3, v_4 ساقطين على الحافة $\{v_3, v_4\}$ ولا توجد رؤوس أخرى ساقطة على هذه الحافة.
- درجات الرؤوس المختلفة هي:

$$deg\, v_1 = 2 \quad , \quad deg\, v_2 = 8 \quad , \quad deg\, v_3 = 3$$

$$deg\, v_4 = 1 \quad , \quad deg\, v_5 = 2 \quad , \quad deg\, v_6 = 4$$

$$deg\, v_7 = 1 \quad , \quad deg\, v_8 = 3 \quad , \quad deg\, v_9 = 0$$

نلاحظ أن درجة $v_9 = 0$، وبالتالي فإن v_9 تكون رأساً منعزلة.

توجد علاقة هامة تربط بين درجة رؤوس الرسم وعدد حواف هذا الرسم. وهذه العلاقة يمكن صياغتها كالآتي:

إذا كان G رسماً، وكان:

$$\vartheta(G) = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$$

فان:

$$deg\, v_1 + deg\, v_2 + deg\, v_3 + \cdots\ deg\, v_n = 2\,|\mathcal{E}(G)|$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} deg\, v_i = 2\,|\mathcal{E}(G)|$$

بمعنى أخر مجموع درجات كل الرؤوس لأي رسم G هو ضعف عدد حواف الرسم.

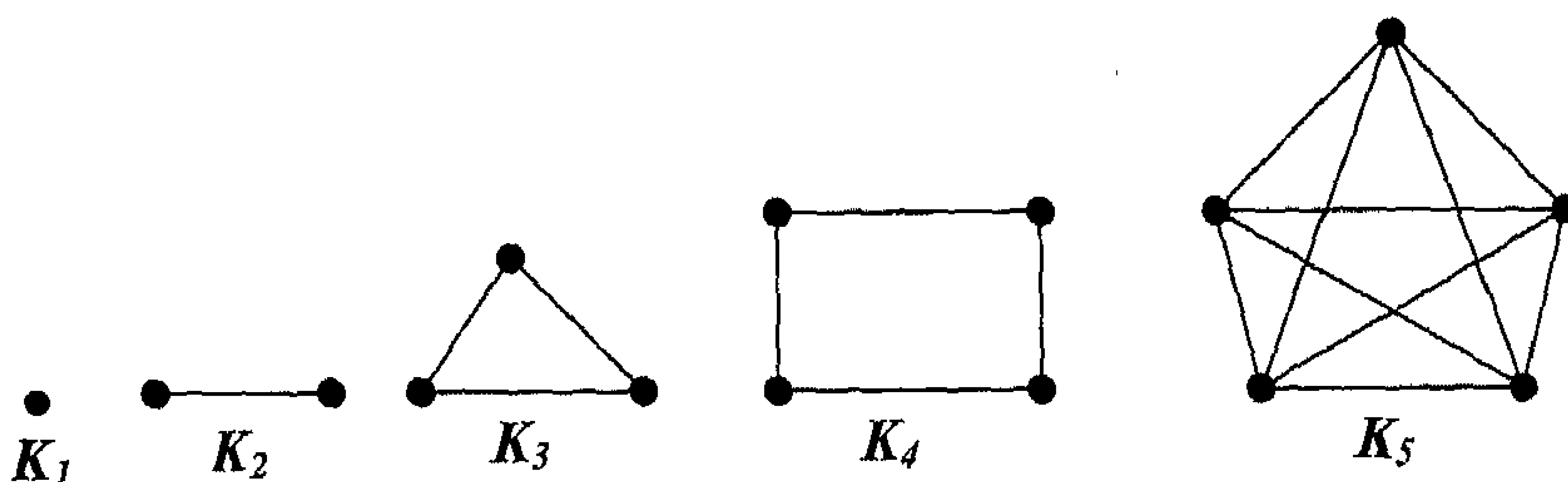
من البيانات السابقة للرسم G السابق، نلاحظ أن درجات رؤوس هذا الرسم هي $0\,,3\,,1\,,4\,,2\,,1\,,3\,,8\,,2$، وبالتالي فان عدد حواف الرسم G هو:

$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{1}{2}\left(2+8+3+1+2+4+1+3+0\right) = \frac{24}{2} = 12\,edge$$

مثال(٤): المخطط الذي درجات رؤوسه $3\,,3\,,1\,,4\,,2\,,1\,,3\,,8\,,2$ لا يمثل رسماً، نظراً لأن مجموع هذه الدرجات يساوي 27 وهو عدد فردي. أي أنه لا يوجد رسماً له رؤوس من الدرجات السابقة.

١/٤- الرسم التام The Complete Graph

الرسم التام (الكامل) من الدرجة n والذي يرمز له بالرمز K_n، هو الرسم الذي يحتوي على n من الرؤوس، وحافة واحدة فقط تربط بين كل زوج من الرؤوس المختلفة. على سبيل المثال، الرسومات التالية تكون تامة:



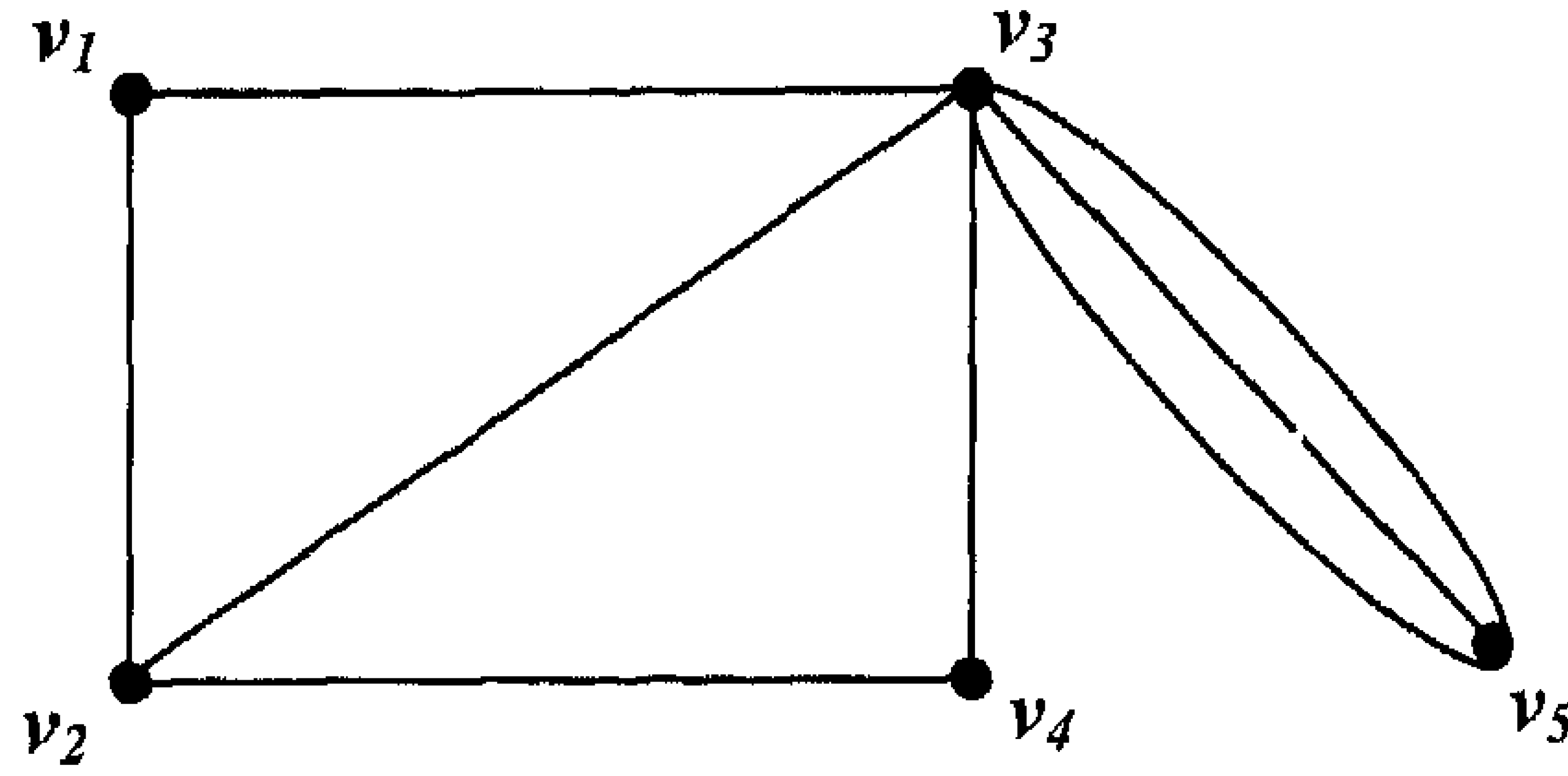
بالطبع كما نعلم، أن الرسم التام هو رسماً بسيطاً. كما أن الرسم التام K_n له بالضبط $\binom{n}{2}$ من الحواف. وكل رأس لها الدرجة $(n-1)$.

١/٥- الرسم الجزئي Subgraph

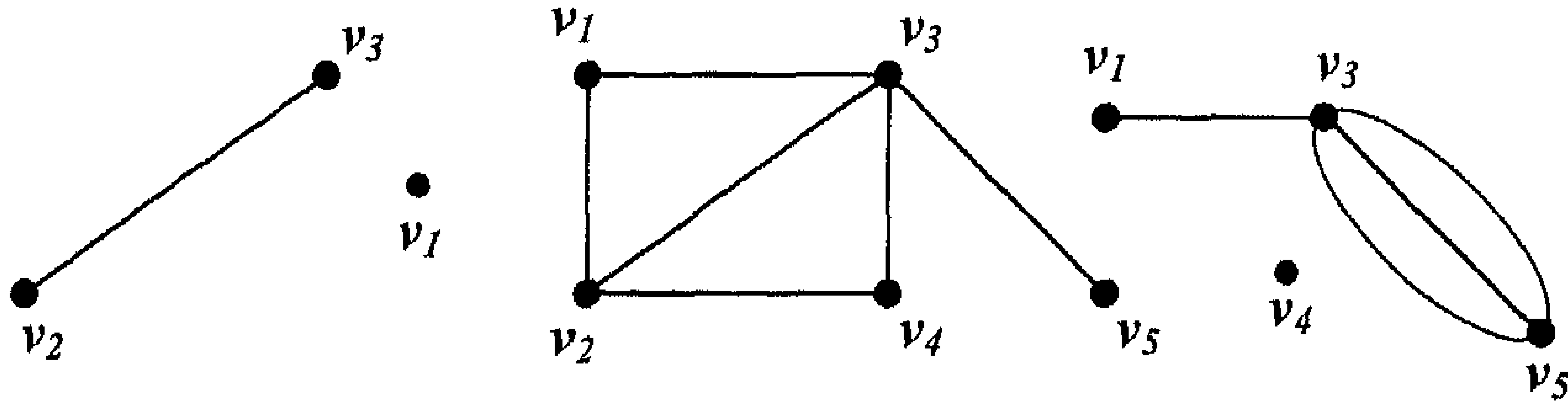
يقال للرسم H أنه رسماً جزئياً من الرسم G، إذا كانت كل رأس للرسم H هي رأساً للرسم G، كما أن أي حافة للرسم H تكون أيضاً حافة للرسم G. أي أن الرسم H يكون رسماً جزئياً من G إذا كان:

$\vartheta(H) \subset \vartheta(G) \quad , \quad E(H) \subset E(G)$

مثال (٥): نفرض أن G رسماً كالآتي:



فإن كل من الرسومات الآتية تكون رسومات جزئية من الرسم G.



مثال (٦): نفرض أن $G = (V , E)$ رسماً، حيث:

$E = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6\} \quad , \quad \vartheta(G) = \{v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5\}$

كما يوضحه الجدول التالي:

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$\mathcal{E}(G)$	$\{v_1\}$	$\{v_1 , v_2\}$	$\{v_1 , v_3\}$	$\{v_1 , v_3\}$	$\{v_2 , v_3\}$	$\{v_3 , v_4\}$

أ – أوجد تمثيلاً للرسم G.

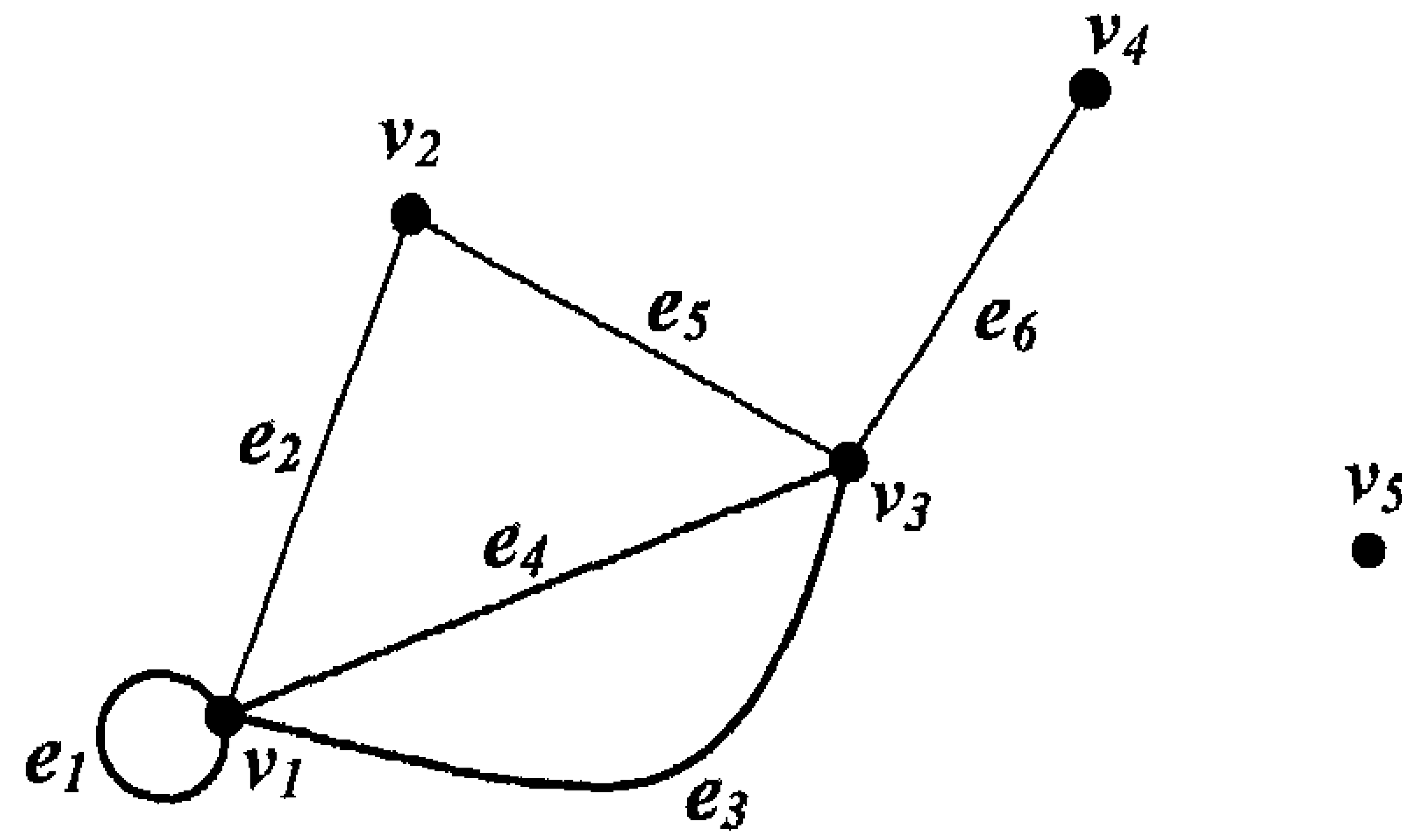
ب – أوجد درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة.

ج – أوجد الحواف المتكررة والعروات.

د – هل الرسم G رسماً بسيطاً؟ ولماذا؟

الحل

أ – يمكن تمثيل الرسم G كالآتي:



ب – درجات رؤوس الرسم G يبينها الجدول التالي:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$\sum deg\, v_i$
$deg\, v_i$	5	2	4	1	0	12

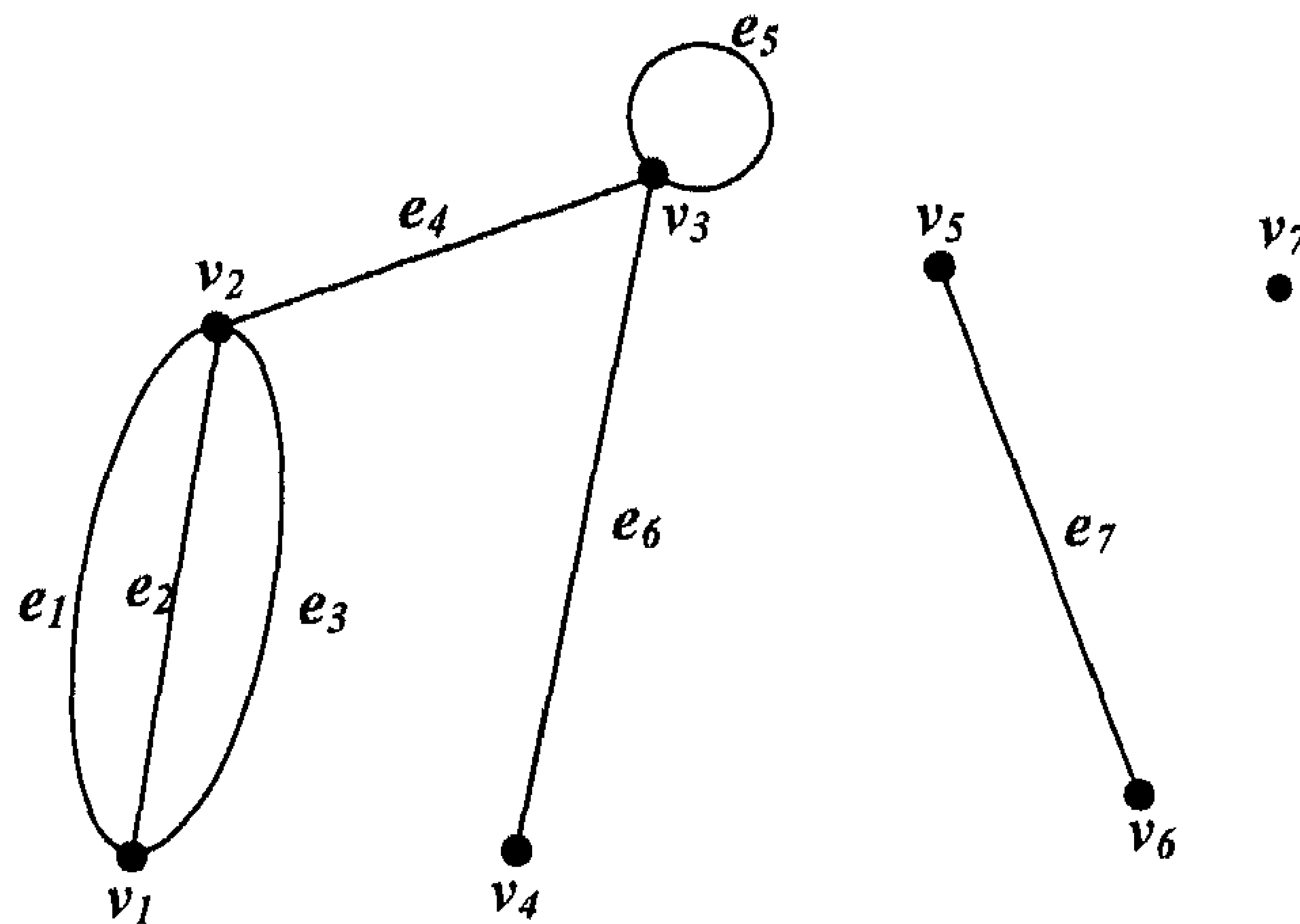
حيث إن $deg\, v_5 = 0$ ، فإن v_5 تكون رأساً منعزلة، وهي الرأس المنعزلة الوحيدة في هذا الرسم. كما أن:

$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} deg\, v_i = \frac{12}{2} = 6$$

ج – الحواف المتكررة هي e_3 , e_4 وتكرارها مرتين. كما أن e_1 عروة.

د – الرسم G ليس رسماً بسيطاً، لأنه يحتوي على حافة متكررة وعروة.

مثال (٧): نفرض أن $G = (V\ ,\ E)$ رسماً معطى بالشكل التالي:



أ – أوجد كلاً من المجموعات V , E , $\mathcal{E}(G)$ للرسم G.

ب – أوجد درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة.

الحل

أ – مجموعة الرؤوس هي:

$$V = \{v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 , v_7\}$$

كما أن مجموعة الحواف هي:

$$E = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7\}$$

وأيضاً الجدول التالي يعطينا المجموعة $\mathcal{E}(G)$:

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$\mathcal{E}(G)$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6\}$

ب – درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة يبينها الجدول الآتي:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$\sum deg\, v_i$
$deg\, v_i$	3	4	4	1	1	1	0	14

نلاحظ أن v_7 هي رأساً منعزلة، كما أن:

$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{7} deg\, v_i = \frac{14}{2} = 7$$

مثال(٨): هل يوجد رسماً درجات رؤوسه هي $3 , 4 , 2 , 5 , 3$؟

حيث إن:

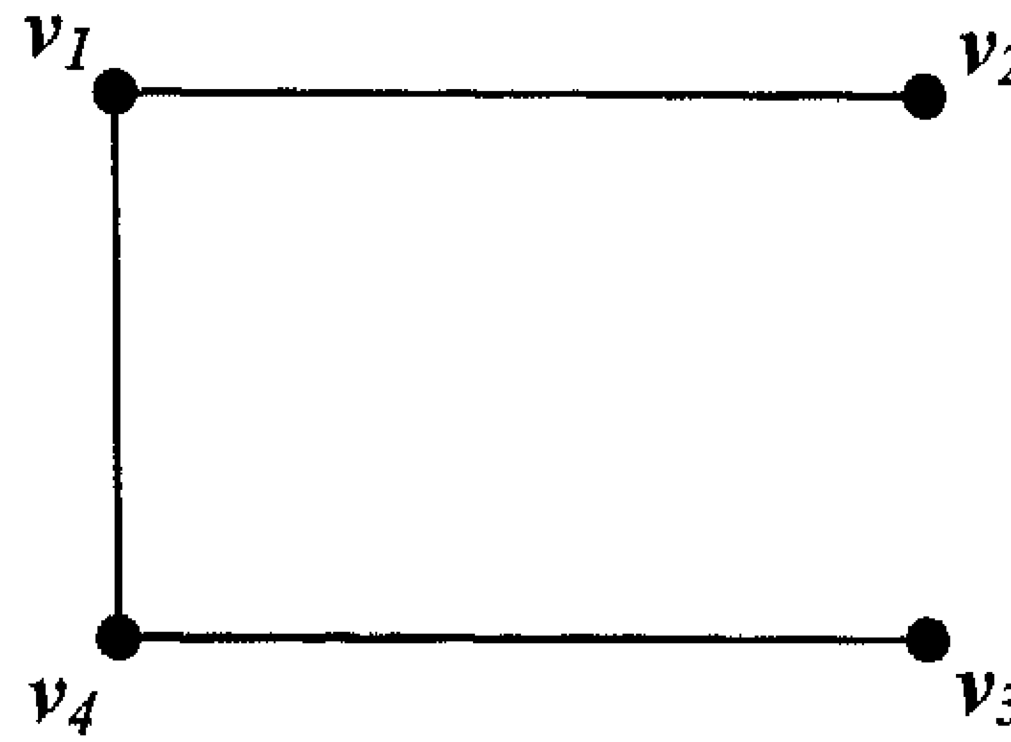
$$\sum_{i=1}^{5} deg\, v_i = 17 \quad (\text{المجموع فردياً})$$

وبالتالي فإنه لا يوجد رسماً له رؤوس من الدرجات السابقة.

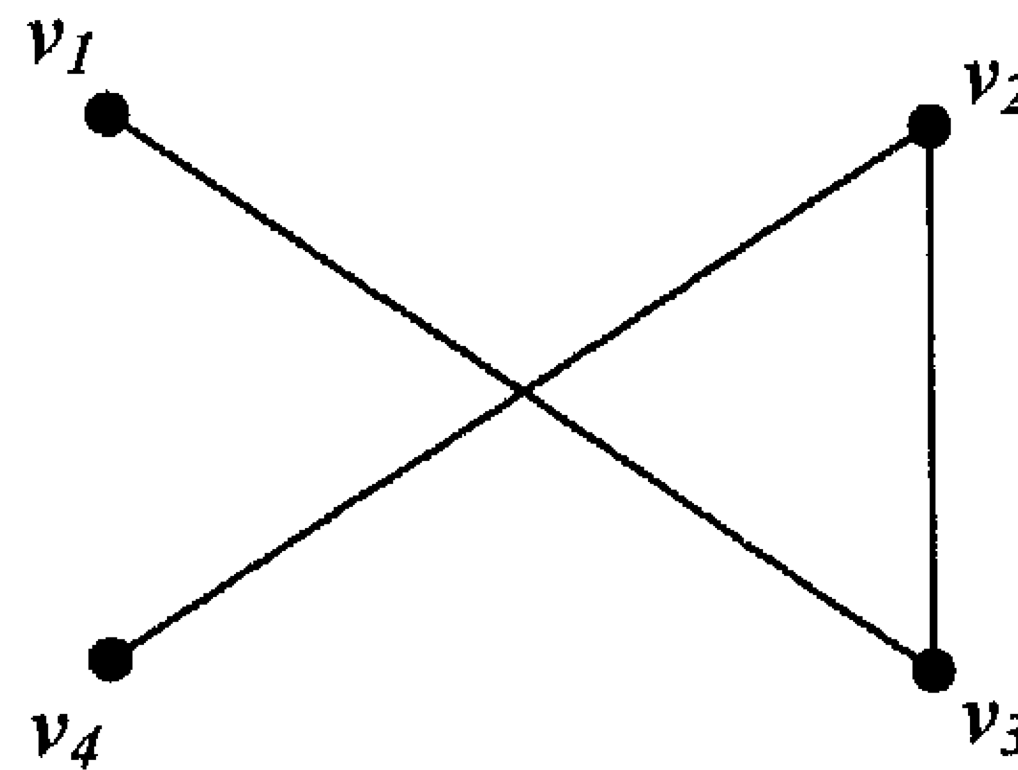
٦/١ – الرسم المكمل The Complement Graph

يعرف الرسم المكمل (المتمم) للرسم البسيط G والذي يرمز له بالرمز G' على أنه رسماً بسيطاً رؤوسه هي نفسها رؤوس الرسم G، كما أن أي حافة بين الرأسين

u , v تنتمي للرسم G' لا تنتمي هذه الحافة للرسم G. والعكس صحيح. على سبيل المثال، إذا كان G رسماً كالآتي:



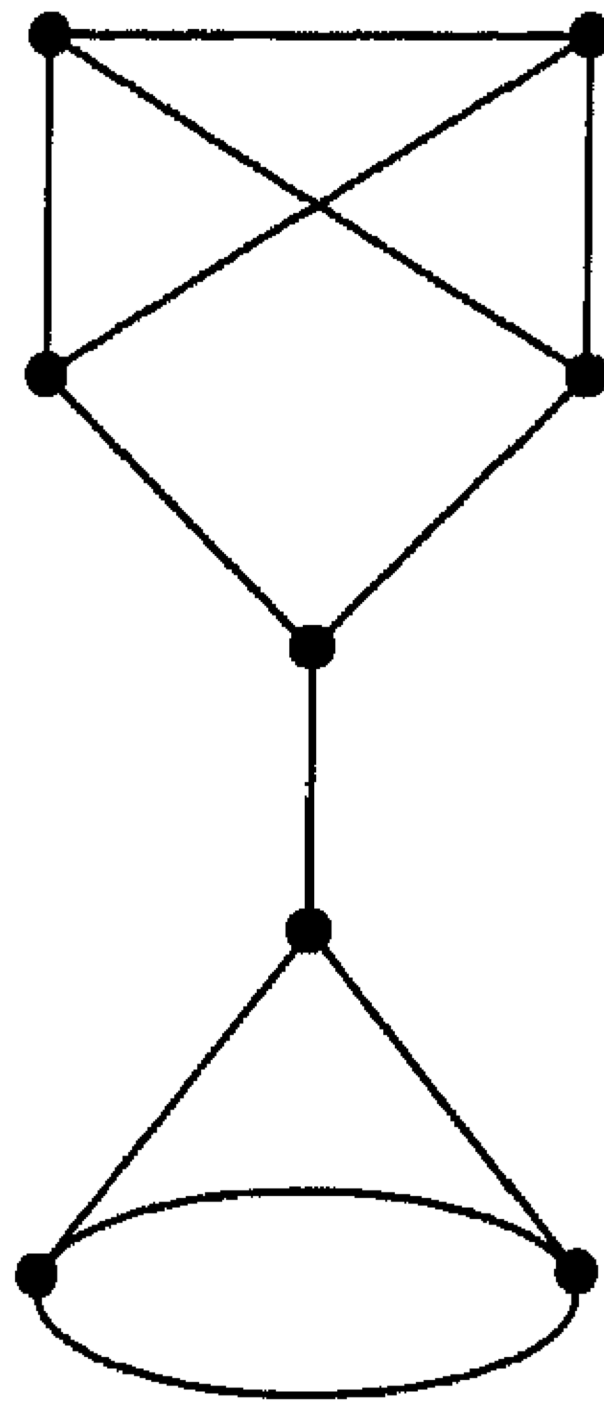
فإن الرسم المكمل G' للرسم G هو:



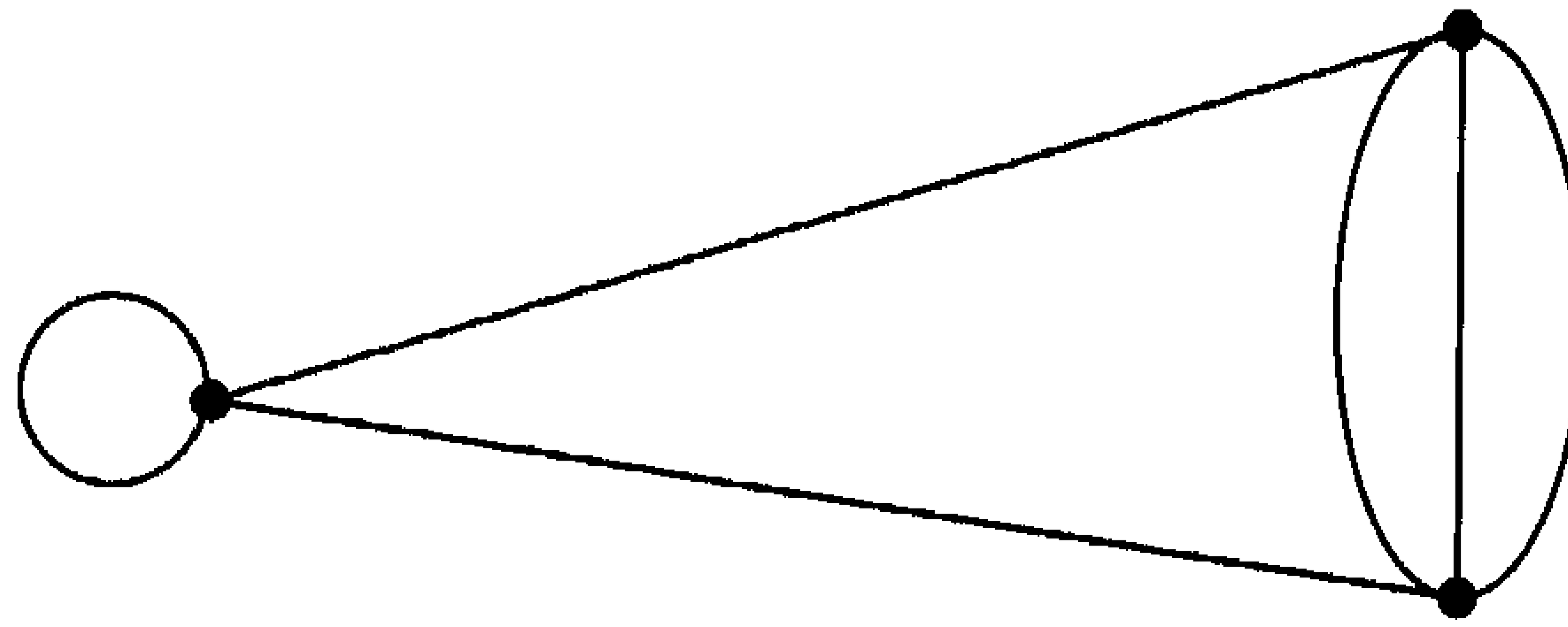
ومن ثم فإن اتحاد الرسم G والرسم G' يعطي الرسم التام. أي أن $G \cup G' = K_n$.

١/٧- الرسم المنتظم Regular Graph

يقال للرسم $G = (V , E)$ أنه رسماً منتظماً إذا كانت كل رؤوسه لها نفس الدرجة والتي يرمز لها بالرمز r. وهذا العدد r يسمى درجة رؤوس الرسم G. على سبيل المثال، الرسم التالي رسماً منتظماً من الدرجة الثالثة:



كما أن الرسم التالي منتظماً من الدرجة الرابعة.



نظرية (١)

إذا كان G رسماً منتظماً من الدرجة r يحتوي على n من الرؤوس. أثبت أن عدد حواف الرسم G يساوي $\frac{nr}{2}$.

البرهان

حيث إن G رسماً منتظماً من الدرجة r، فإن:

$$deg\, v_i = r$$

بأخذ المجموع للطرفين، نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} deg\, v_i = \sum_{i=1}^{n} r = nr \qquad (1)$$

ولكن

$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} deg\, v_i \qquad (2)$$

من العلاقتين (2) , (1) نجد أن:

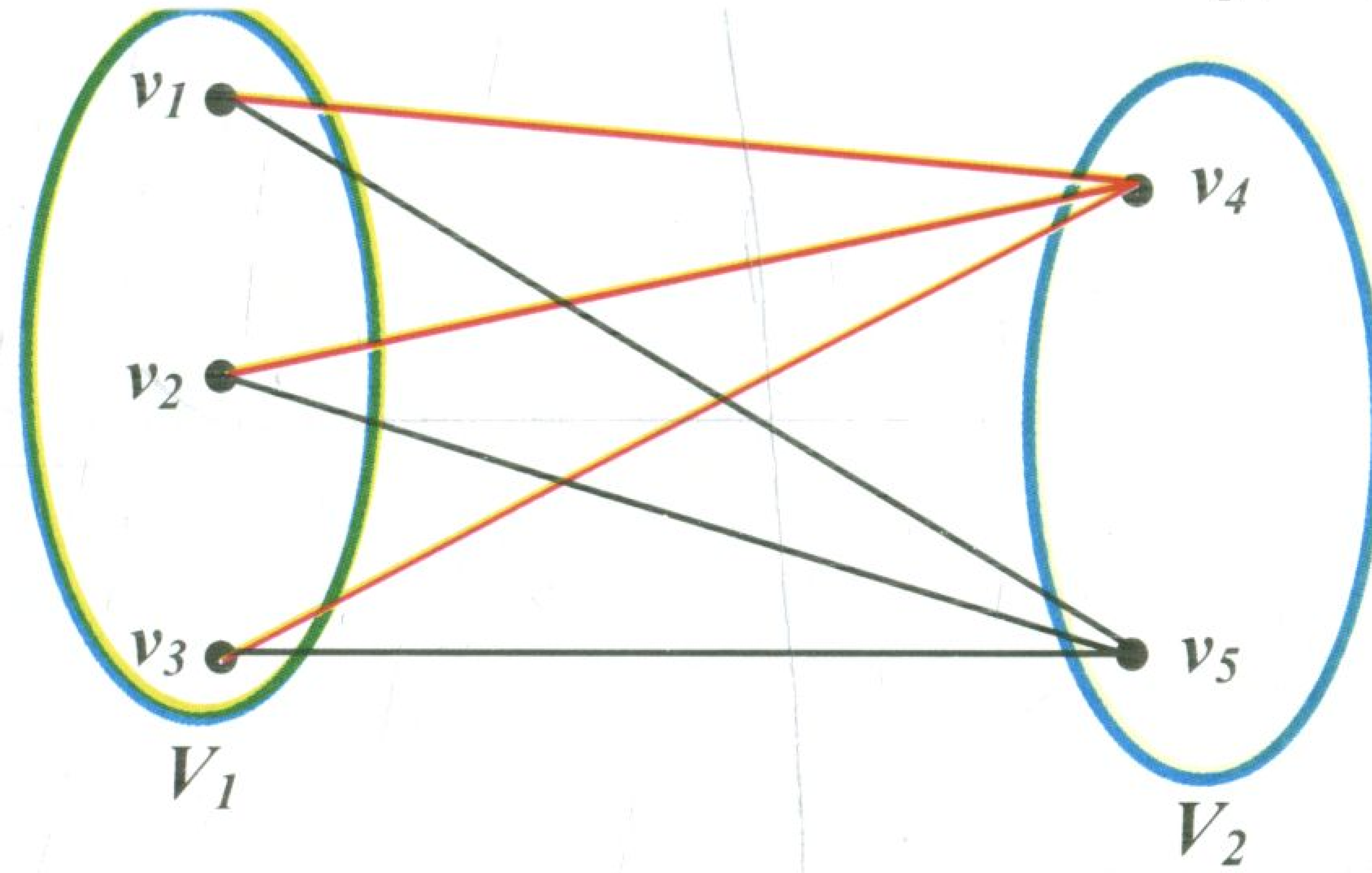
$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{1}{2}(nr) = \frac{nr}{2}$$

♦ نلاحظ من نظرية (١) أن عدد حواف الرسم التام K_n هو:

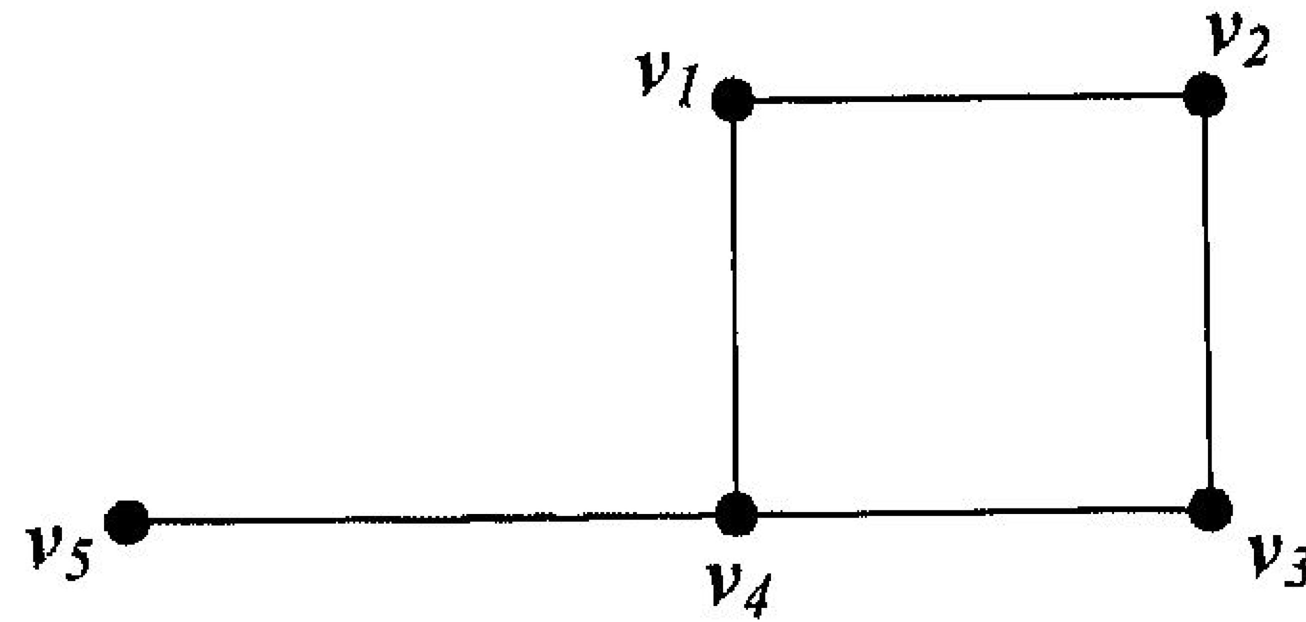
$$|\mathcal{E}(G)| = \frac{nr}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

٨/١- الرسم ثنائي التجزئة Bipartite Graph

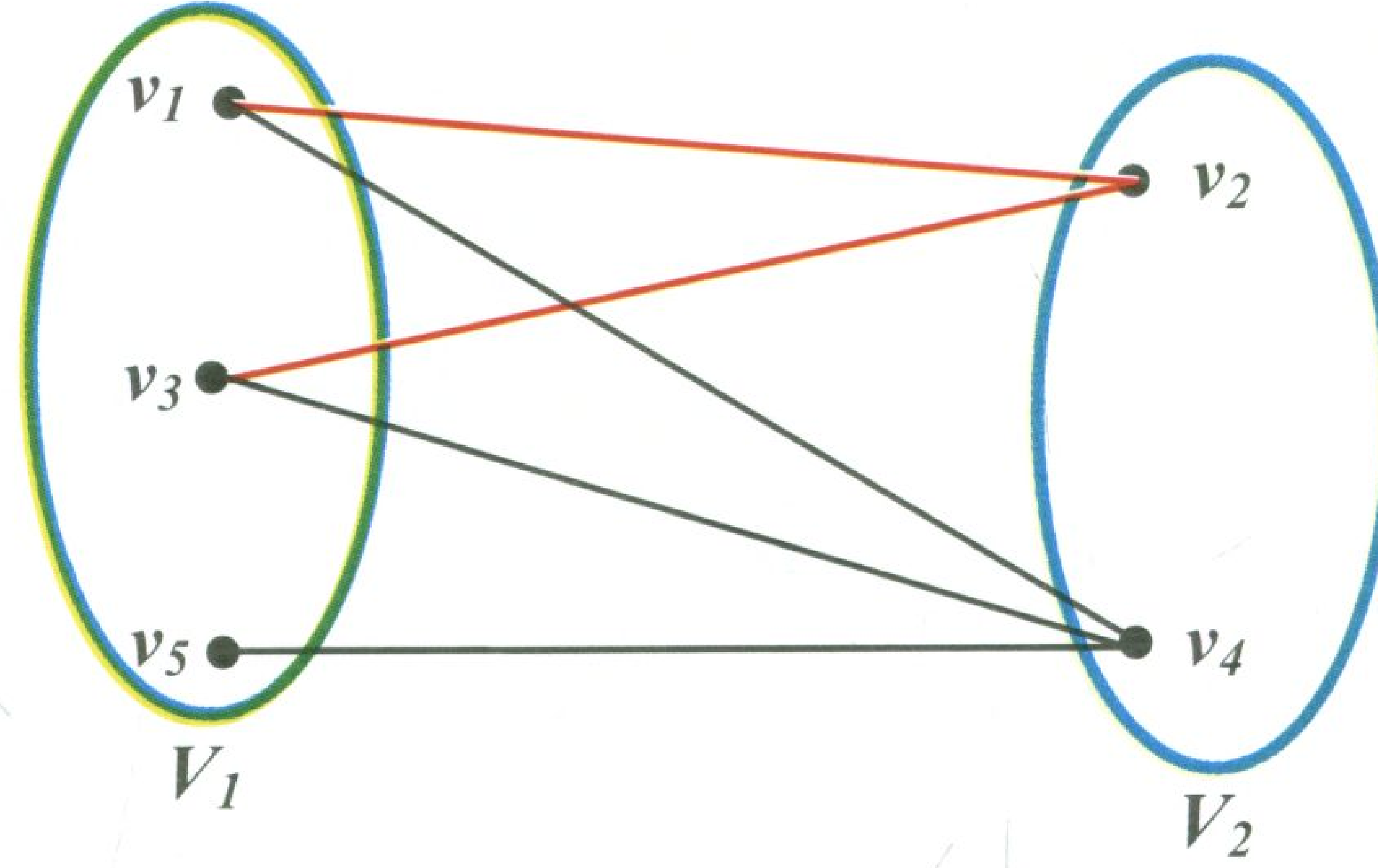
يقال أن الرسم البسيط $G = (V , E)$ رسماً ثنائي التجزئة، إذا قُسِّمت مجموعة رؤوسه V إلى مجموعتين متنافيتين V_1 , V_2، بحيث أن كل حافة من حواف الرسم G تربط رأساً من V_1 برأس من V_2. أي أنه لا توجد حافة في الرسم G تربط بين رأسين داخل المجموعة الواحدة V_1 أو V_2. بمعنى آخر، إذا كانت $V_1 \neq \Phi , V_2 \neq \Phi$ فإن $V_1 \cap V_2 = \Phi$ كما أن $V = V_1 \cup V_2$ على سبيل المثال الرسم التالي ثنائي التجزئة:



♦ كما أن الرسم التالي أيضاً يمثل رسماً ثنائي التجزئة:

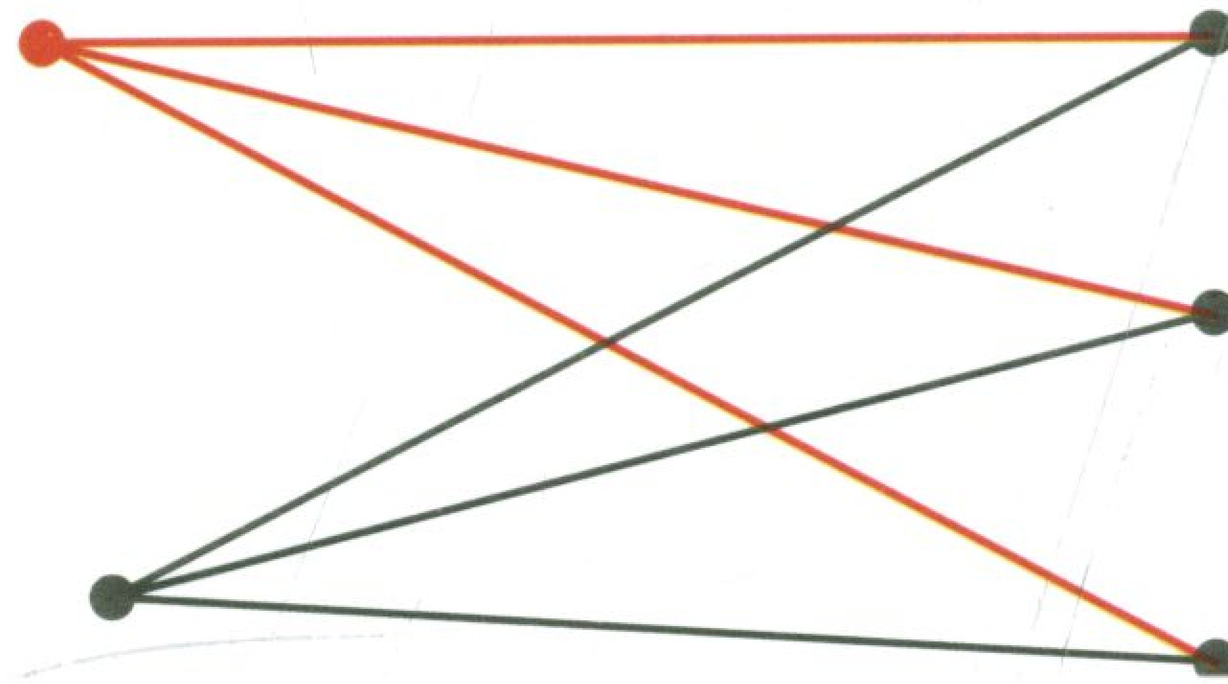


لأنه يمكن رسم تجزئة مناسبة للرؤوس كما في الرسم التالي:

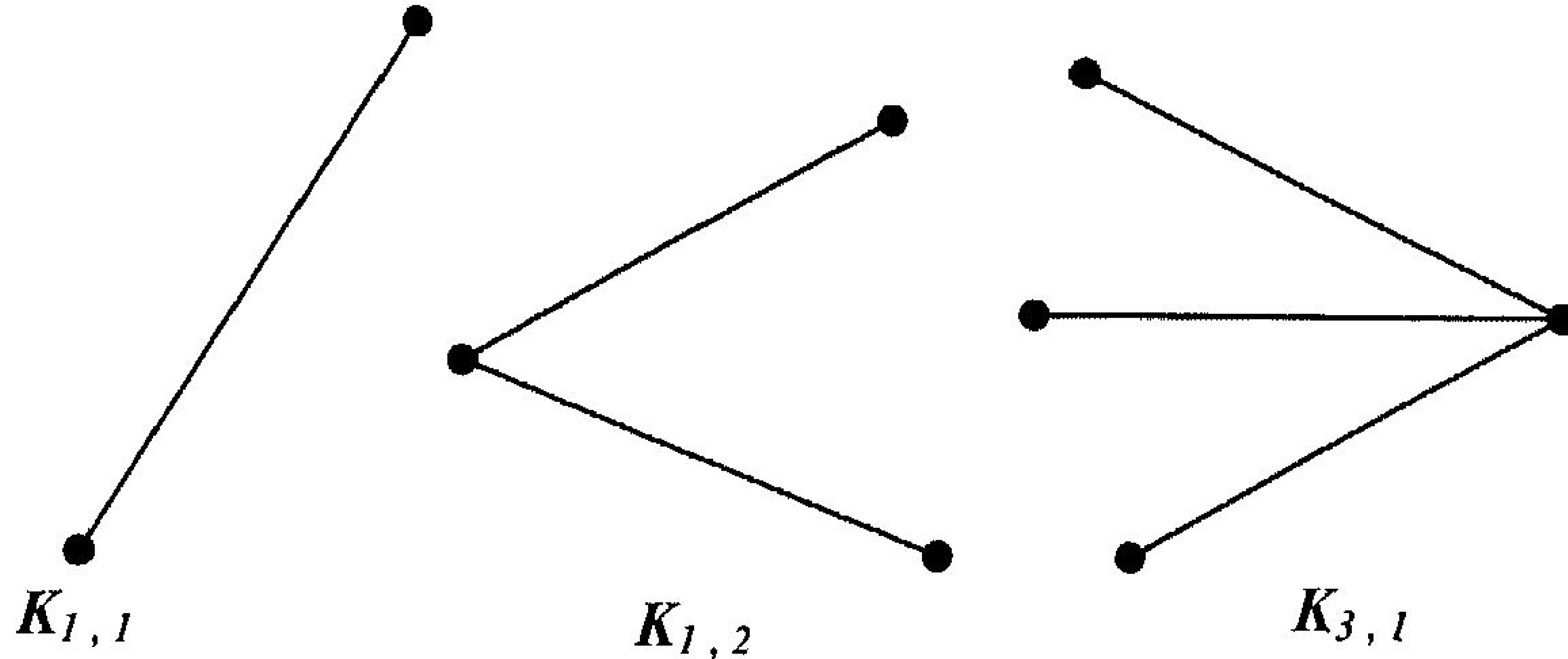


٩/١- الرسم ثنائي التجزئة التام Complete Bipartite Graph

يقال أن الرسم ثنائي التجزئة البسيط $G=(V=V_1\cup V_2\ ,\ E)$ رسماً ثنائي التجزئة تام والذي يرمز له بالرمز $K_{n,m}$، إذا كانت كل رأس من V_1 مجاورة لكل رأس من V_2. أي أنه إذا كانت V_1 تحوي n من الرؤوس، كما أن V_2 تحوي m من الرؤوس، بحيث أنه توجد حافة بين كل رأس من V_1 بكل رأس من V_2. على سبيل المثال، الرسم التالي ثنائي التجزئة تام $K_{2,3}$:



♦ كما أن الرسومات التالية تمثل رسومات ثنائية التجزئة تامة:



نظرية (٢)

إذا كان $K_{n,m} = (V = V_1 \cup V_2 \ , \ E)$ رسماً ثنائي التجزئة تـام. أثبـت أن عدد حواف الرسم $K_{n,m}$ يساوي nm.

البرهان

حيث إن عدد رؤوس المجموعة V_1 هو n، كما أن عدد رؤوس V_2 هـو m.

وبالتالي فإن:

$$deg\, v_i = m \quad , \quad \forall\, v_i \in V_1 \quad and \quad deg\, v_i = n \quad , \quad \forall\, v_i \in V_2$$

وحيث إن:

$$\sum_{\forall\, v_i \in V} deg\, v_i = 2\,|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,|$$

$$\Rightarrow \sum_{\forall\, v_i \in V_1} deg\, v_i + \sum_{\forall\, v_i \in V_2} deg\, v_i = 2\,|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,|$$

$$\Rightarrow \sum_{\forall\, v_i \in V_1} m + \sum_{\forall\, v_i \in V_2} n = 2\,|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,|$$

$$\Rightarrow nm + nm = 2\,|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,|$$

$$\Rightarrow 2nm = 2\,|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,|$$

وبالتالي فإن:

$$|\,\mathcal{E}(K_{nm})\,| = n\,m$$

ومن ثم فإن عدد حواف الرسم $K_{n,m}$ يساوي nm.

١/١٠ - الممرات والدورات Paths and Cycles

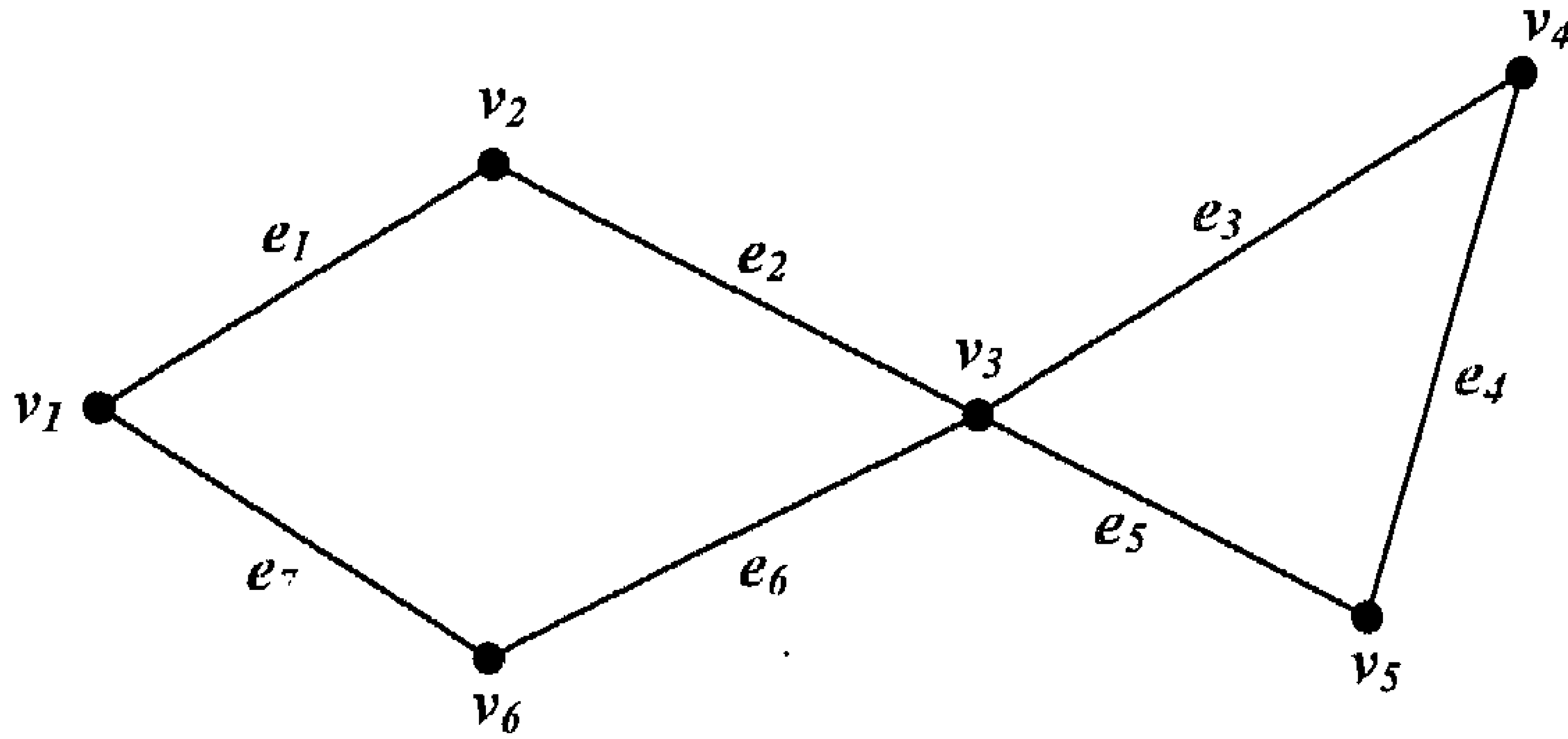
كثيراً من مشاكل نظرية الرسومات تطرح سؤالاً مهماً جداً عن إمكانية الوصول من رأس في رسم ما إلى رأس أخرى في نفس الرسم بواسطة عدة حواف متعاقبة أو متتالية. لمناقشة هذا السؤال، يجب دراسة بعض التعريفات والمفاهيم الهامة في هـذه النظرية كما يلي:

١/١٠/١- المسار The Walk

نفرض أن u , v رأسين في الرسم $G=(V , E)$، فإن المسار من الرأس u إلى الرأس v يُعرف على أنه سلسلة (متتابعة) متناوبة (متبادلة) من الرؤوس والحواف في الرسم G، بداية بالرأس u ونهاية بالرأس v، بحيث أن كل حافة في الرسم تكون ساقط على الرأس السابقة لها مباشرة والرأس التالية لها مباشرة في السلسلة (المتتابعة). مع إمكانية أن تكون الرأسين u , v هما رأساً واحدة. أي أن رأس البداية هي نفسها رأس النهاية. أي أنه إذا كانت:

$$v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n$$

سلسلة متبادلة من الرؤوس والحواف، حيث $u=v_1 , v=v_n$، كما أن $e_i=\{v_i , v_{i+1}\}$، فإننا نسمي هذه السلسلة مساراً من الرأس u إلى الرأس v. على سبيل المثال، في الرسم التالي:



شكل (٤)

نجد أن السلسلة:

$$v_1 , e_7 , v_6 , e_6 , v_3 , e_3 , v_4 , e_3 , v_3 , e_5 , v_5 \qquad (1)$$

تكون مساراً من الرأس v_1 إلى الرأس v_5. ببساطة المسار من الرأس u إلى الرأس v، هو طريقة للوصول من الرأس u إلى الرأس v بواسطة عدة حواف ورؤوس متبادلة في الرسم.

أ- المسار المغلق Closed Walk

يعرف على أنه المسار الذي يبدأ وينتهي عند نفس الرأس v. أي أن المسار من الرأس v إلى الرأس v نفسها يسمى مساراً مغلقاً. أي أنه إذا كانت:

$$v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n$$

سلسلة متبادلة من الرؤوس والحواف، حيث $v_1 = v_n = v$، كما أن $e_i = \{v_i , v_{i+1}\}$، فإننا نسميها مساراً مغلقاً من الرأس v إلى الرأس v نفسها.

ب- المسار المفتوح Open Walk

يعرف على أنه المسار الذي يبدأ عند الرأس u وينتهي عند رأس مختلفة v. أي أنه إذا كانت:

$$v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n$$

سلسلة متبادلة من الرؤوس والحواف، حيث $u = v_1 \neq v_n = v$، كما أن $e_i = \{v_i , v_{i+1}\}$، فإننا نسميها مساراً مفتوحاً من الرأس u إلى الرأس v.

المسار: $v_1 , e_7 , v_6 , e_6 , v_3 , e_3 , v_4 , e_3 , v_3 , e_5 , v_5$

يمكن التعبير عنه بسلسلة من الحواف كالتالي:

$$e_7 , e_6 , e_3 , e_3 , e_5$$

١/١٠/٢- الطريق The Trail

الطريق من الرأس u إلى الرأس v هو مسار من الرأس u إلى الرأس v، بحيث أنه لا توجد حافة واحدة في الرسم تُسْتَخْدَم أكثر من مرة. أي أنه إذا كانت:

$$v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n$$

مساراً من الرأس u إلى الرأس v، فإننا نسميه طريقاً إذا كان $e_i \neq e_j , \forall\ i \neq j$.

على سبيل المثال، المسار (1) ليس طريقاً لأن الحافة e_3 اسْتُخْدِمَت مرتين. ولكن المسار:

$$v_2 , e_2 , v_3 , e_3 , v_4 , e_4 , v_5 , e_5 , v_3 \qquad (2)$$

يكون طريقاً من الرأس v_2 إلى الرأس v_3. وهذا الطريق يمكن التعبير عنه بدلالة الحواف فقط كالآتي:

$$e_2 , e_3 , e_4 , e_5$$

أ- الطريق المغلق Closed Trail

هــو الطريق الذي يبدأ وينتهي عند نفس الرأس v. أي أن الطـــريق من الرأس v إلى الرأس v نفسها يسمى طريقاً مغلقاً. أي أنه إذا كان:

$$v = v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n = v$$

طريقاً مغلقاً من الرأس v إلى الرأس v نفسها فإننا نسميه دارة (دائرة) Circuit. عل سبيل المثال، الطريق التالي:

$$e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7 \qquad (3)$$

يكون دائرة (دارة).

ب- الطريق المفتوح Open Trail

الطريق الذي يبدأ عن رأس u تختلف عن رأس النهاية v يسمى طريقاً مفتوحاً.

١/١٠/٣- الممر The Path

الممر من الرأس u إلى الرأس v هو مسار من الرأس u إلـــى الـــرأس v، بحيث أنه لا توجد رأس واحدة في الرسم تُستَخْدَم أكثر من مرة. أي أنه إذا كانت:

$$u = v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , \cdots , e_{n-1} , v_n = v$$

مساراً من الرأس u إلى الرأس v، فإننا نسميه ممراً إذا كان $e_i \neq e_j , \forall i \neq j$.

على سبيل المثال، المسار (2) ليس ممراً لأن الرأس v_3 استُخْدِمَت مرتين. ولكـــن المسار:

$$v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , v_3 , e_5 , v_5$$

يكون ممراً من الرأس v_1 إلى الرأس v_5.

أ- الممر المغلق Closed Path

الممر الذي يبدأ وينتهي عند نفس الرأس يسمى ممراً مغلقاً أو دورة Cycle. على سبيل المثال، الدائرة (3) لا تكون دورة، وذلك لأن الرأس v_3 استُخْدِمَت مـــرتين. ولكن المسار e_1 , e_2 , e_6 , e_7 يكون دورة.

ب- الممر المفتوح Open Path

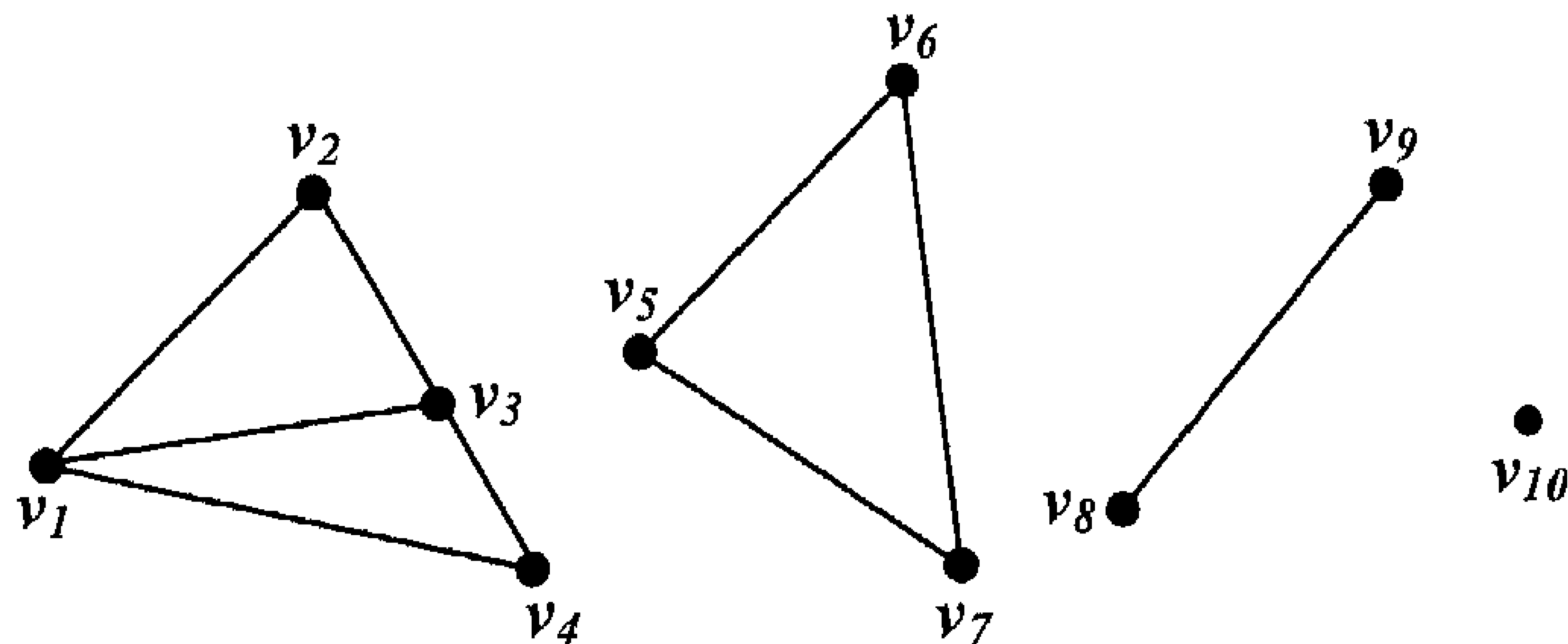
الممر الذي يبدأ عند رأس تختلف عن رأس النهاية يسمى ممراً مفتوحاً.

ويمكن تجميع هذه التعريفات في جدول كالآتي:

رأس البداية u ، رأس النهاية v	$u \neq v$	$u = v$
المسار: لا توجد قيود على عدد مرات الحواف والرؤوس التي يمكن ظهوره.	مسار مفتوح	مسار مغلق
الطريق: لا توجد حافة يمكن أن تظهر أكثر من مرة.	طريق مفتوح	طريق مغلق (دائرة)
الممر: لا توجد رأس يمكن أن تظهر أكثر من مرة، مع إمكانية استثناء أن v ، u ممكن أن يكونا نفس الرأس.	ممر مفتوح	ممر مغلق (دورة)

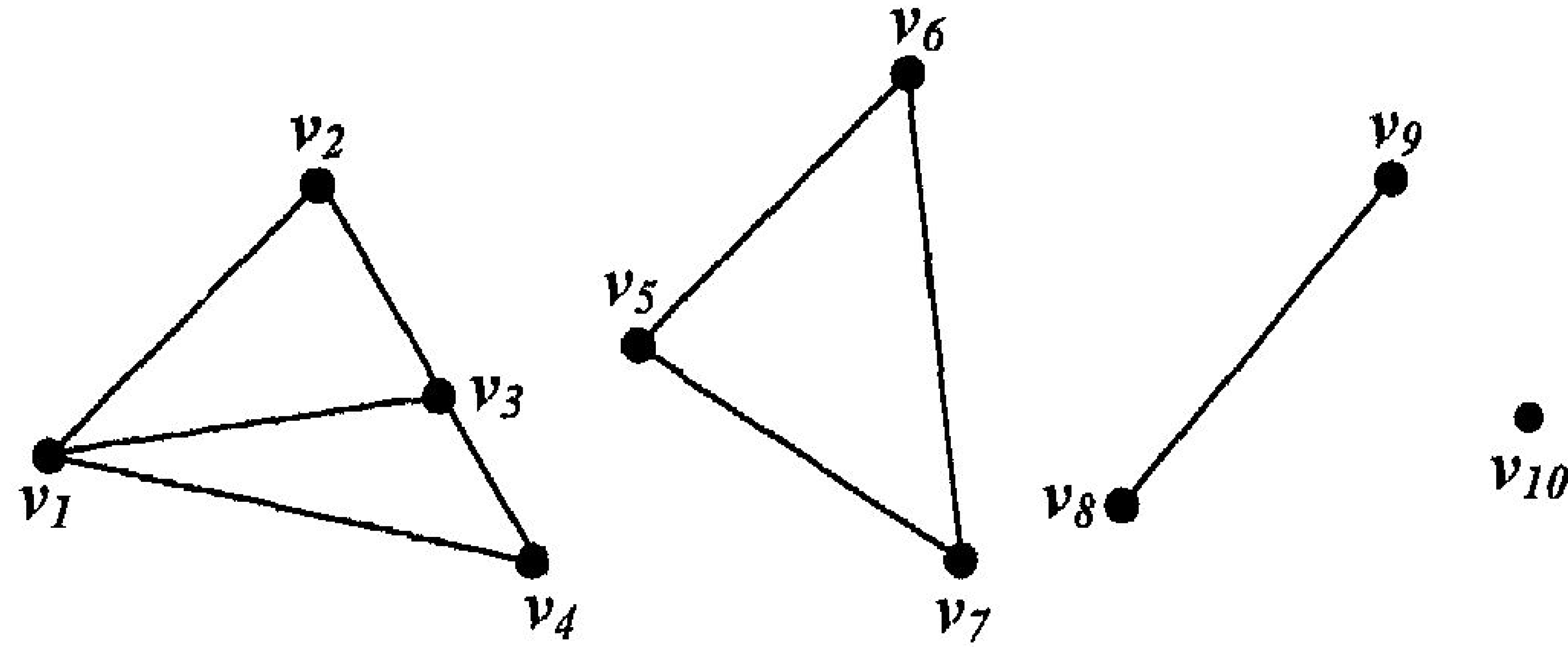
١/١١- الرسوم المترابطة Connected Graphs

يقال أن الرأسين u,v في الرسم $G=(V\ ,\ E)$ مرتبطتان، إذا وجد ممر في الرسم G من الرأس u إلى الرأس v. كما يقال أن الرسم $G=(V\ ,\ E)$ مترابطاً إذا كان كل زوج من الرؤوس مرتبطاً. أي أن الرسم $G=(V\ ,\ E)$ مترابطاً إذا كان لكل u,v ، فإن u رأساً مرتبطة بالرأس v. كذلك يقال أن $G=(V\ ,\ E)$ رسماً غير مترابط، إذا وجد رأسين $u,v \in V$ بحيث أن الرأس u غير مرتبط بالرأس v. على سبيل المثال الرسم المعطى في شكل (٤) يكون مترابط، بينما الرسم التالي غير مترابط:



شكل (٥)

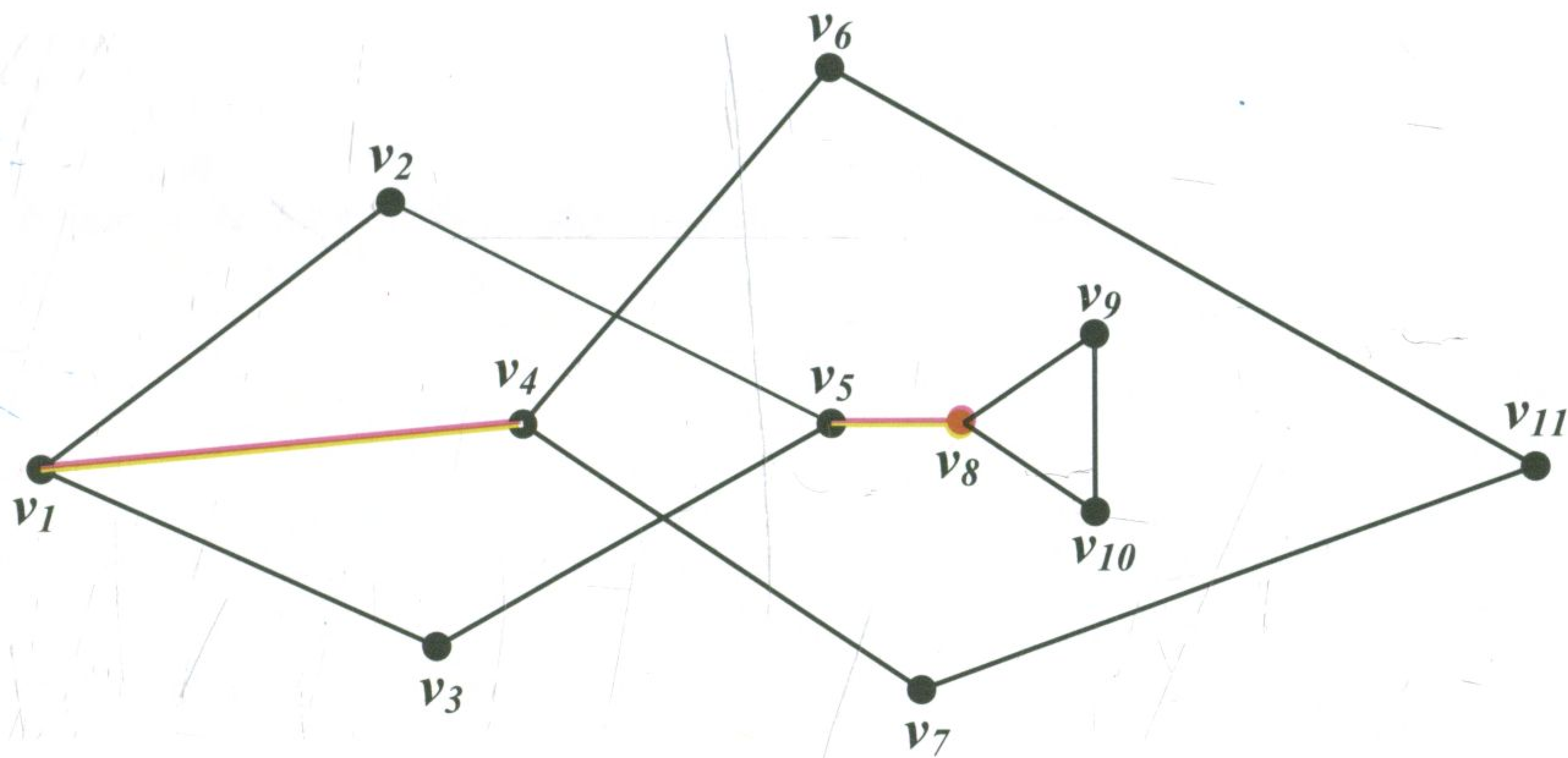
الرسم غير المترابط يمكن تقسيمه إلى رسمين أو أكثر من الرسومات الجزئية المترابطة والمتنافية. على سبيل المثال الرسم السابق في شكل (٥) يمكن تقسيمه إلى أربعة رسومات جزئية مترابطة كالآتي:



شكل (٦)

١٢/١- الجسر The Bridge

تسمى الحافة e في الرسم المترابط G جسراً، إذا كان الرسم الناتج من G بعد إزالة الجسر e يكون رسماً غير مترابط. على سبيل المثال، الرسم التالي:



شكل (٧)

له جسران هما الحافتين $\{v_1 , v_4\},\{v_5 , v_8\}$، ولا توجد حواف أخرى تكون جسوراً.

١٣/١- طول الممر The Length of a Path

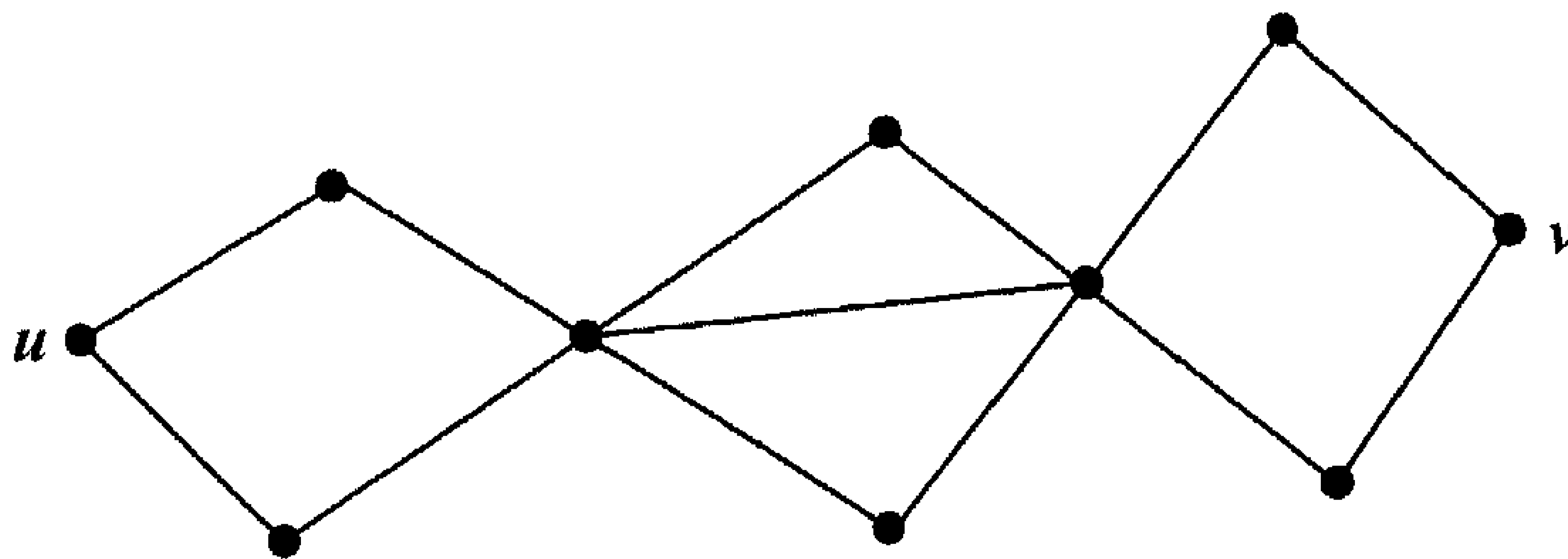
إذا كان $G=(V\ ,\ E)$ رسماً، فإن طول الممر والذي يرمز له بالرمز P في الرسم G، يعرف على أنه عدد الحواف في P.

١٤/١- المسافة بين رأسين The Distance Between Two Vertices

إذا كانت u,v رأسين مختلفتين في الرسم $G=(V\ ,\ E)$، فإن المسافة من الرأس u إلى الرأس v والتي يرمز لها بالرمز $d(u\ ,\ v)$ تعرف على أنها طول أقصر ممر من الرأس u إلى الرأس v. فإذا كانت الرأسان u,v غير مرتبطتين، فإننا نقول أن المسافة من الرأس u إلى الرأس v لا نهائية. كما أن $d(v\ ,\ v)=0\ ,\ \forall v\in G$.

١٥/١- قطر الرسم المترابط The Diameter

يعرف قطر الرسم المترابط $G=(V\ ,\ E)$ على أنه أقصى مسافة بين كل أزواج الرؤوس في الرسم G. على سبيل المثال، قطر الرسم التالي:



يكون 5، وذلك لأن $d(u\ ,\ v)=5$. ولا يوجد زوج آخر من الرؤوس تكون المسافة بينهما أكبر من 5.

ثانياً: الرسم الأويلري Eulerian Graph

من المشاكل الشائعة في نظرية الرسومات هي في وجود طريق أو ممر لأي رسم معطى. على سبيل المثال، رسم خطوط الاتصالات في مثال سابق، الممر من رأس إلى أخرى يمثل طريقة إرسال رسالة من دولة إلى أخرى. كما أن هناك مثال سابق أيضاً، يمثل طرق المواصلات من مدينة إلى أخرى، ولا يمكن استخدام طريق سريع أكثر من مرة. مشكلة جسر نيسبرج الشهيرة يمكن ذكرها بدلالة طرق. ومبلغ هذه المشكلة هو تحديد ما إذا كان الطريق مغلق (دائرة) أم لا، والذي يَستخدم كل حافة في الرسم. وكما قلنا سابقاً لا توجد مثل هذه الدائرة. من السهل أن نرى أنه كيف يمكننا استخدام مفهوم الدائرة لتعميم مشكلة جسر نيسبرج.

نسبة إلى ليونارد أويلر، تعرف الدائرة الأويلرية في الرسم المترابط *G* على أنها الدائرة التي تستخدم كل حافة في الرسم *G*. إذا كان الرسم *G* يمتلك دائرة أويلرية، سمي رسماً أويلرياً. بالطبع الرسم الأويلري يجب أن يكون مترابطاً. والآن يمكننا تعميم مشكلة جسر نيسبرج بطرح السؤالين الآتيين:

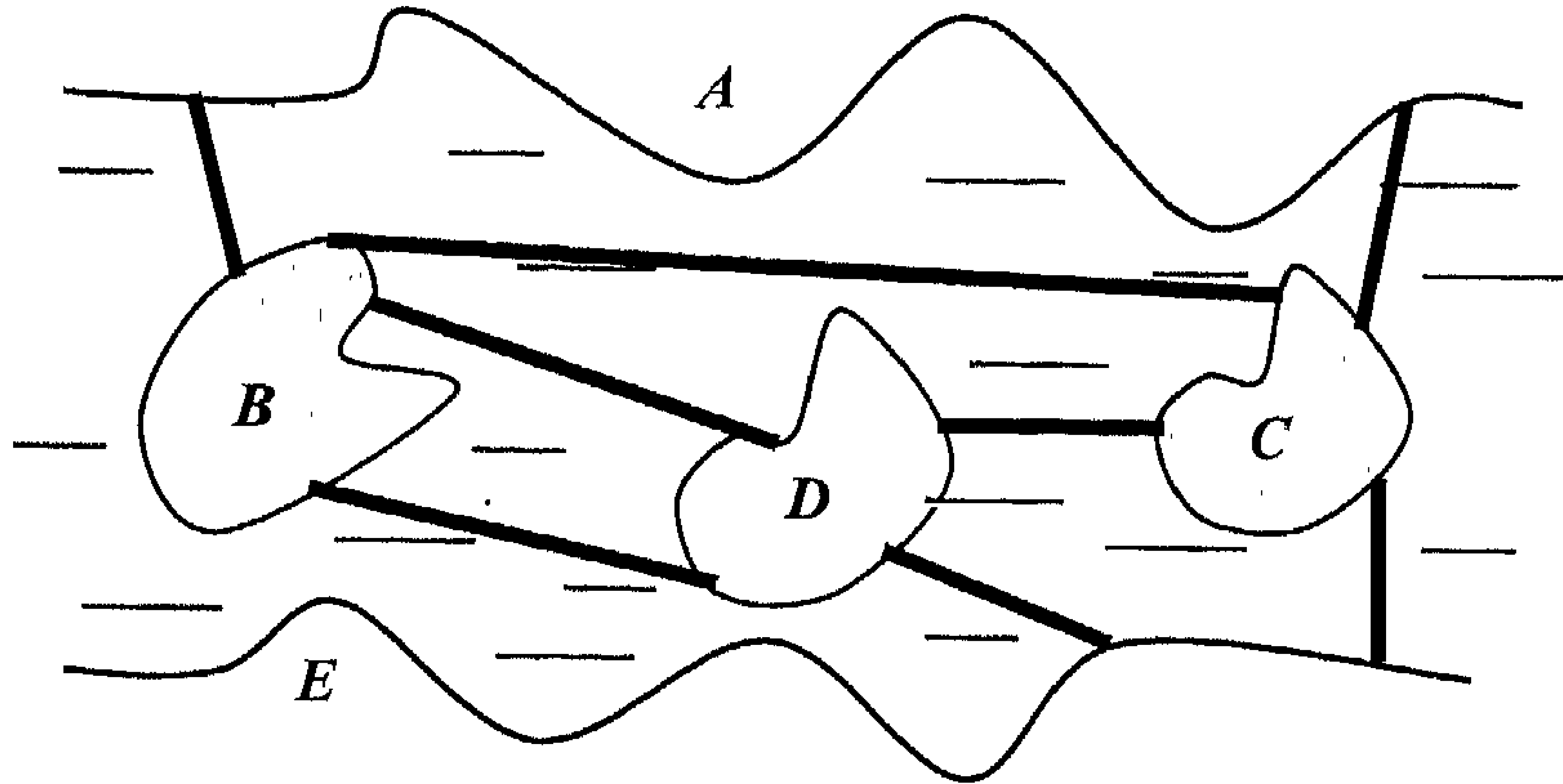
- هل توجد طريقة بسيطة للتعبير عن ما إذا كان الرسم المترابط أويلري أم لا؟
- إذا علمنا أن الرسم أويلري، هل توجد طريقة بسيطة لإيجاد دائرة فعلية في الرسم؟

لحسن الحظ، إجابة كلٍ من هذين السؤالين بالإيجاب.

نظرية (٣)

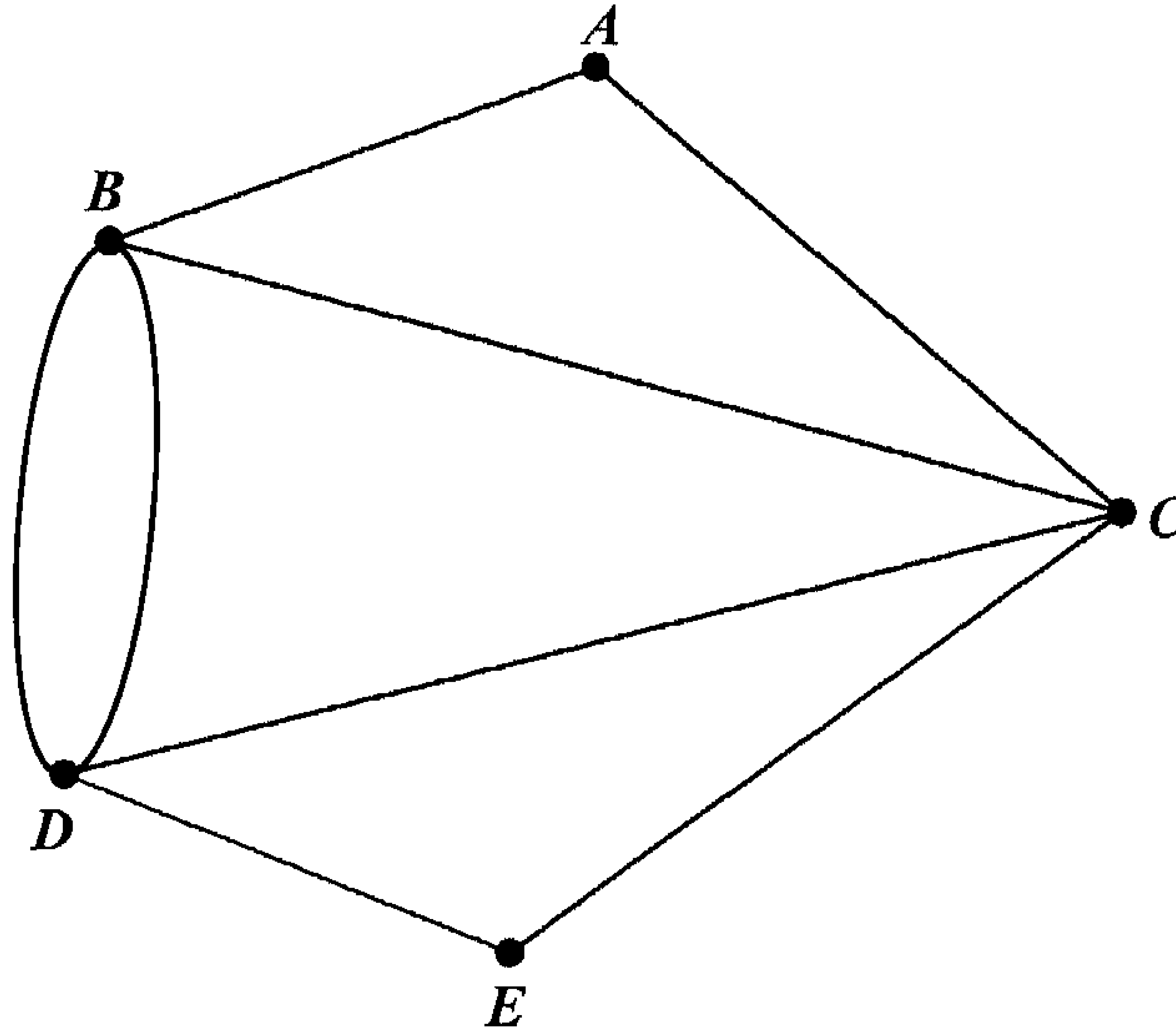
الرسم المترابط يكون أويلري إذا وفقط إذا كانت كل رؤوسه لها درجات زوجية.

مثال (٩): الخريطة التالية تطرح السؤال، هل توجد طريقة لعمل رحلة سياحية عبر جزر هذه الخريطة، قاطعين كل جسر مرة واحدة فقط؟



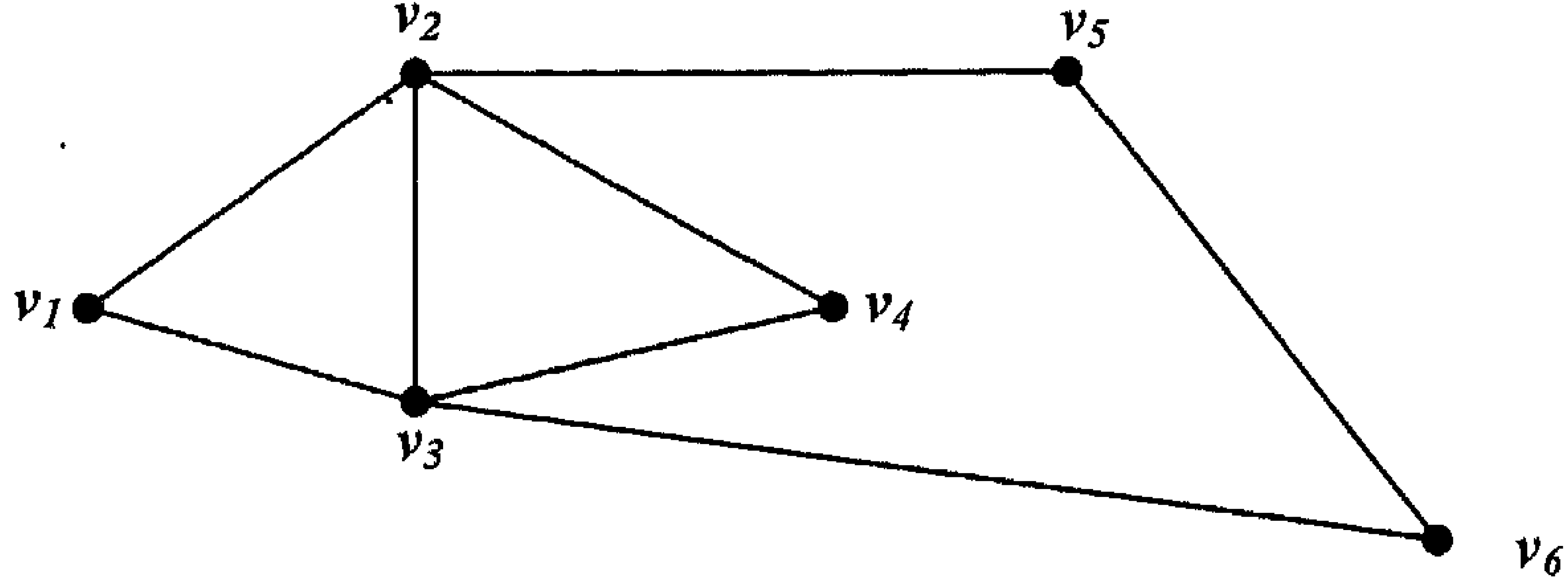
الحل

للإجابة على السؤال، نُعَبِّر أولاً عن الخريطة بالرسم $G=(V\ ,\ E)$ الآتي:



كل رأس في هذا الرسم تمثل بلدة، وكل حافة تمثل جسراً. وحيث إن درجة كل من رؤوس الرسم تكون زوجية (2 or 4). فإنه طبقاً لنظرية (٣) نجد أن الرسم أويلري. أي أنه توجد دائرة أويلرية في الرسم. أي أن إجابة السؤال نعم.

مثال (١٠): في الرسم الرؤوس تمثل مدن، والحواف تمثل الطرق السريعة التي تربط هذه المدن:



هل توجد طريقة للبداية عند أي مدينة وعمل رحلة سياحية باجتياز كل طريق سريع بالضبط مرة واحدة؟

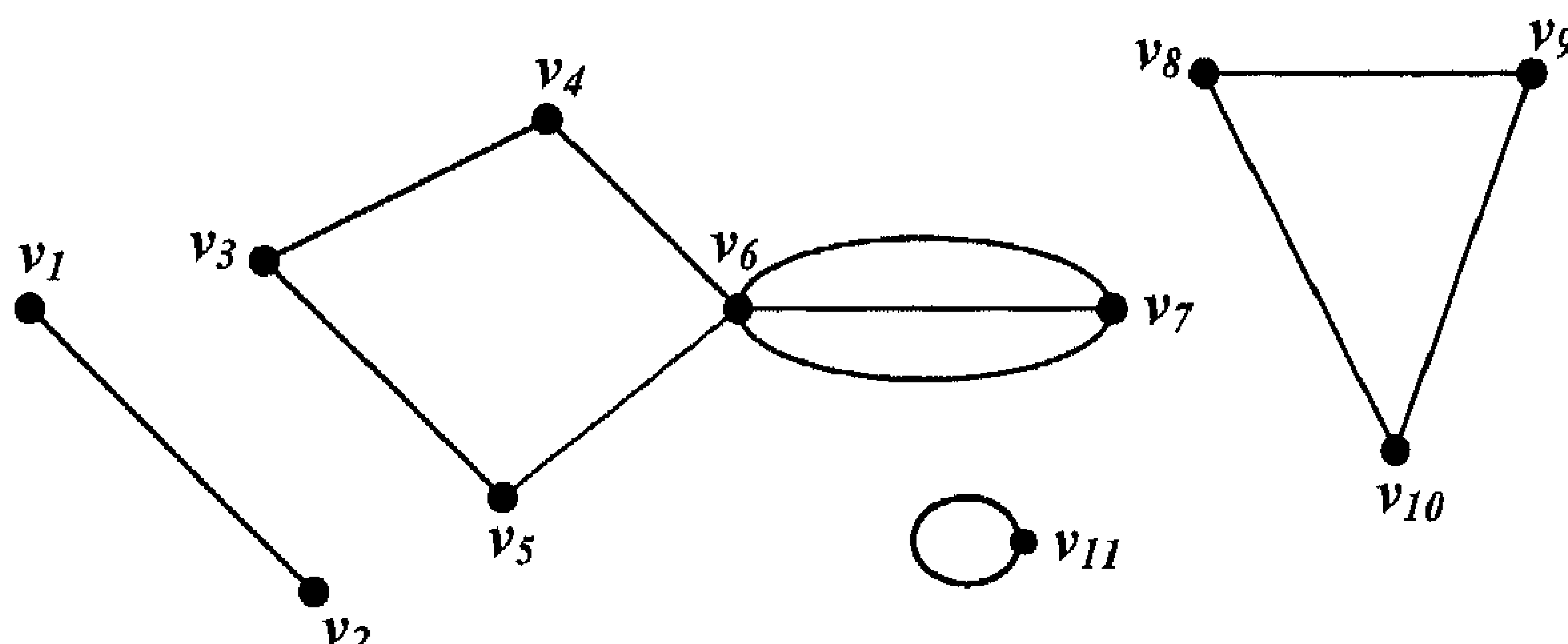
الحل متروك للقارئ.

مثال (١١): خَطِّطْ خريطة لطابق أرضي في منزل معين، وهل توجد طريقة للبداية من أي غرفة أو من خارج المنزل، وعمل جولة داخل المنزل باجتياز كل باب بالضبط مرة واحدة؟

الحل متروك لوجهة نظر القارئ.

تمارين

١ – نفرض الرسم G الآتي:



أ – هل الرأسين v_1 ,v_2 ساقطين؟ وضح إجابتك.

ب – أي رؤوس الرسم إن وجدت، تكون مجاورة لنفسها؟

ج – هل الرأس v_3 مجاورة للرأس v_6؟ وضح إجابتك.

د – هل الرسم G رسماً بسيطاً؟ وضح إجابتك.

هـ – أوجد درجات رؤوس الرسم G، والرؤوس المنعزلة.

و – تحقق من أن:

$$\sum_{i=1}^{n} deg\, v_i = 2\,|\mathcal{E}(G)|$$

٢ – هل يوجد رسم درجات رؤوسه هي **8 , 6 , 5 , 5 , 4 , 3 , 2 , 2** ؟ برر إجابتك.

٣ – نفرض أن $G = (V\ ,\ E)$ رسماً، حيث:

$$E = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\} \quad , \quad \vartheta(G) = \{v_1\ , v_2\ , v_3\}$$

كما يوضحه الجدول التالي:

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4
$\mathcal{E}(G)$	$\{v_1 , v_2\}$	$\{v_1 , v_2\}$	$\{v_1 , v_2\}$	$\{v_2 , v_3\}$

أ – أوجد تمثيلاً للرسم G.

ب – أوجد درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة، إن وجدت.

ج – أوجد الحواف المتكررة والعروات، إن وجدت.

د – هل الرسم G رسماً بسيطاً؟ وضح إجابتك.

٤ – أوجد عدد حواف الرسم G الذي درجات رؤوسه $1, 2, 3, 3, 4, 5$، برر إجابتك.

٥ – أوجد مخطط الرسم التام K_6.

٦ – كم عدد حواف الرسم التام K_{10}؟

٧ - نفرض أن $G = (V, E)$ رسماً، حيث:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \quad , \quad \vartheta(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

كما يوضحه الجدول التالي:

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
$\mathcal{E}(G)$	$\{v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_1, v_2\}$

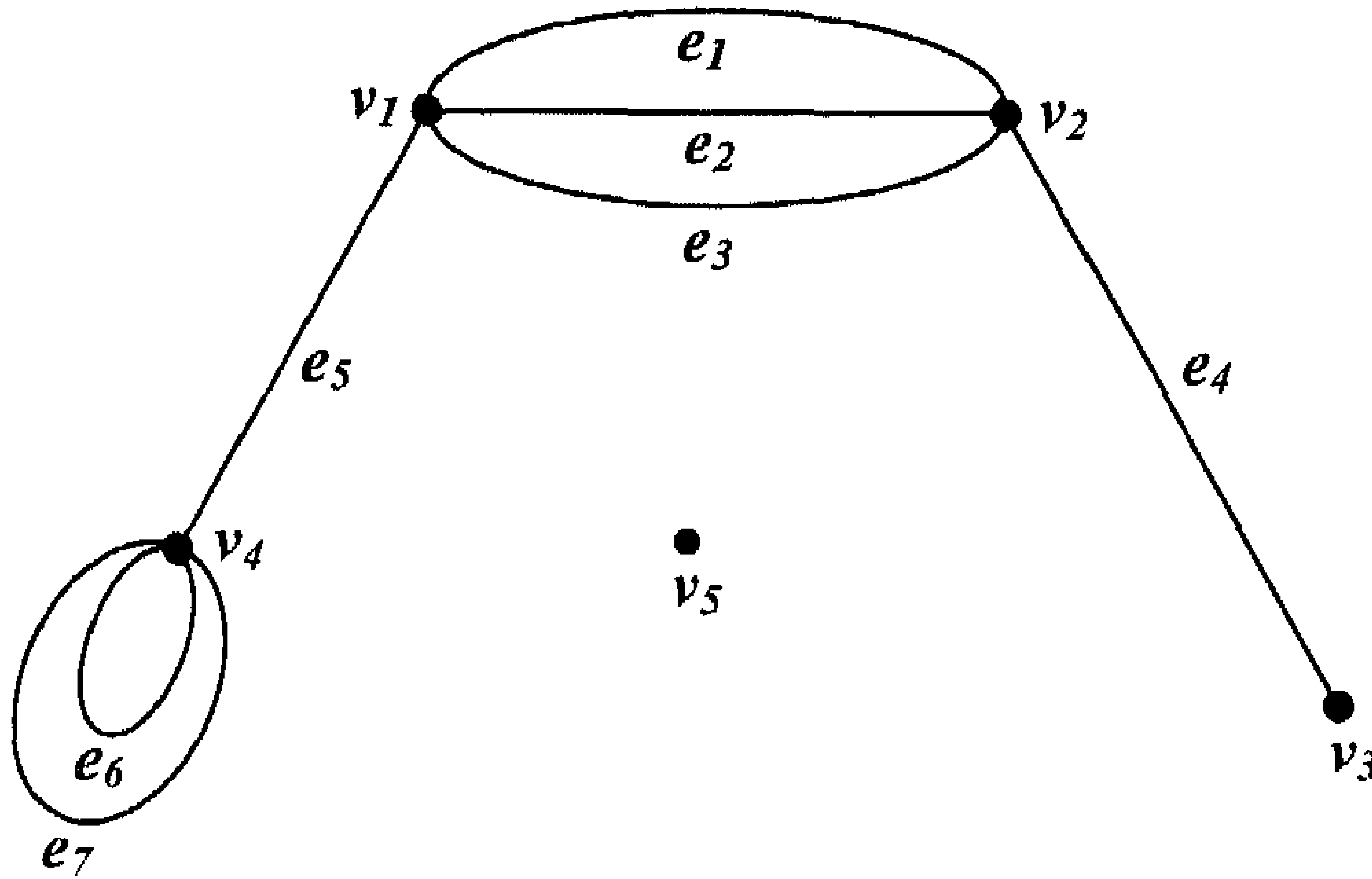
أ – أوجد تمثيلاً للرسم G.

ب – أوجد درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة، إن وجدت.

ج – أوجد الحواف المتكررة والعروات، إن وجدت.

د – هل الرسم G رسماً بسيطاً؟ وضح إجابتك.

٨ – إذا كان $G = (V, E)$ رسماً معطى كما في الشكل التالي:

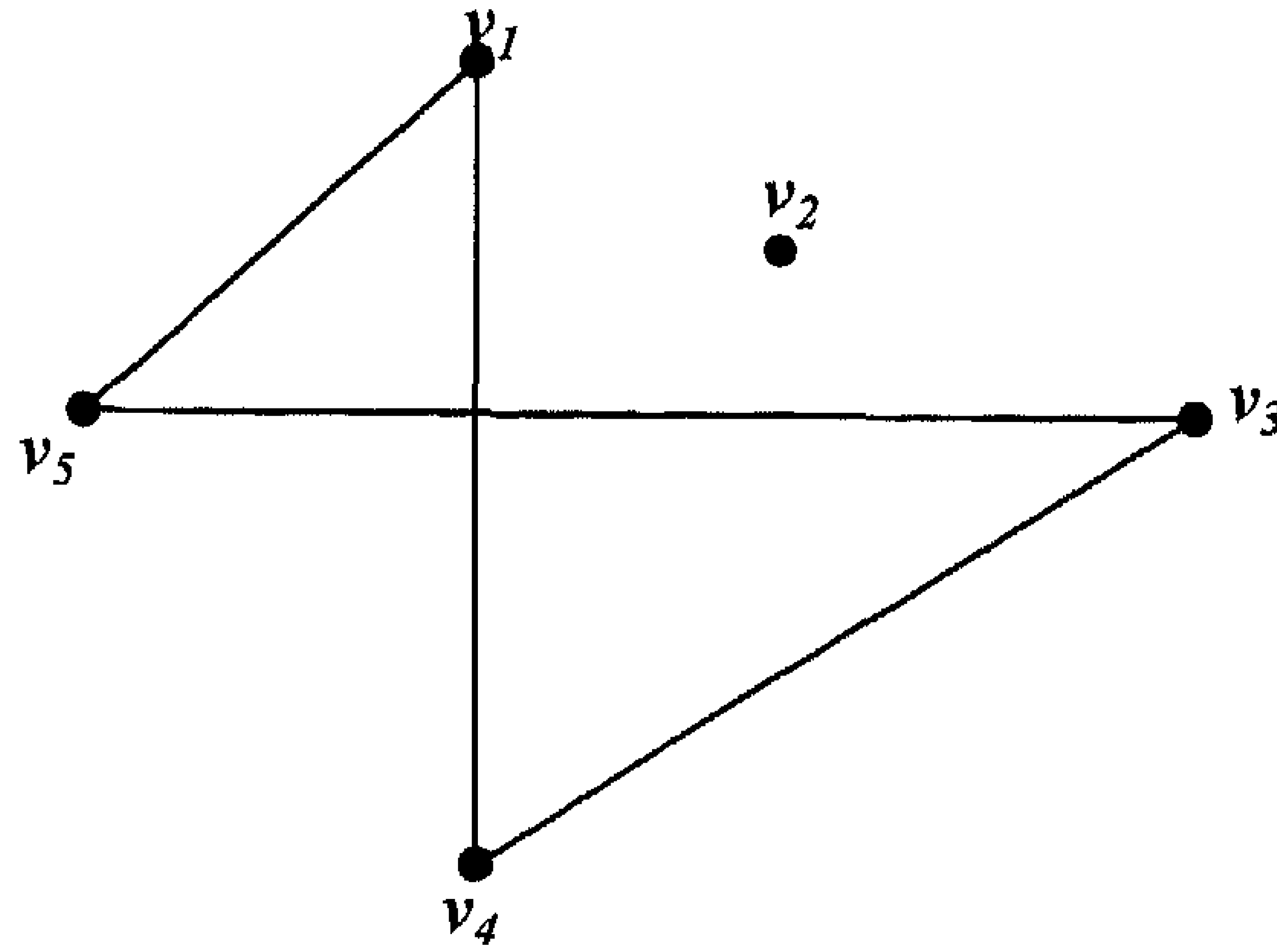


أ – أوجد كلاً من المجموعات V , E , $\mathcal{E}(G)$ للرسم G.

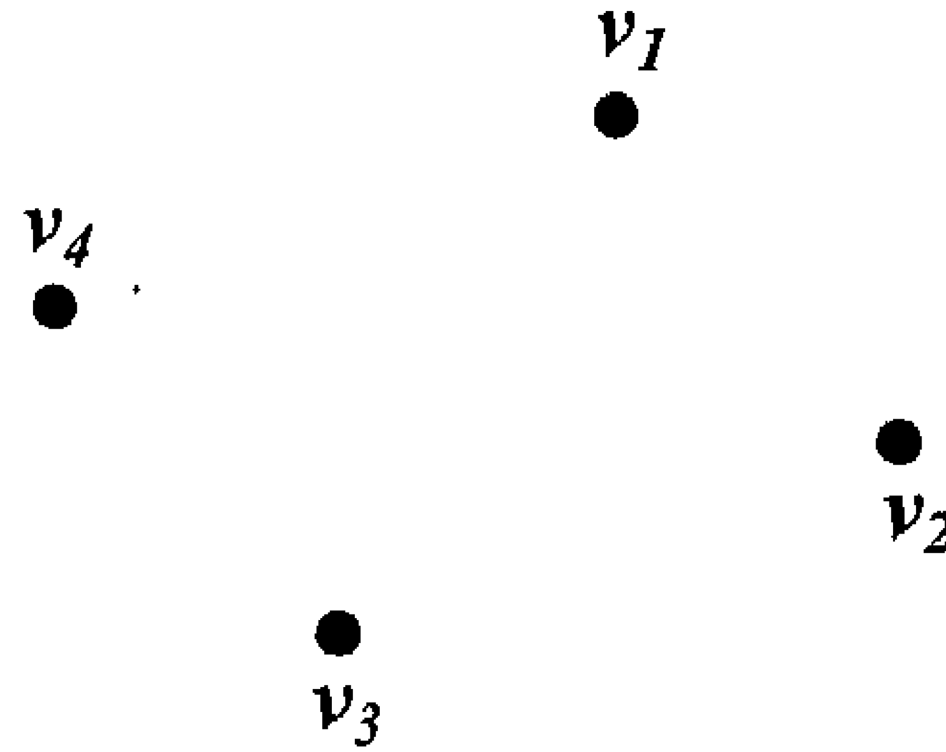
ب – أوجد درجات رؤوس الرسم G والرؤوس المنعزلة.

٩ – أثبت أنه لا يوجد رسماً G درجات رؤوسه هي $2, 3, 3, 4, 4, 5$.

١٠ – أوجد الرسم المكمل للرسم G الآتي:



١١ – أوجد الرسم المكمل للرسم G الآتي:



١٢ – ما هو الرسم المكمل للرسم التام K_n؟

١٣ – أوجد العلاقة بين عدد حواف الرسم G وعدد حواف الرسم G'.

١٣ – أ – أعط مثالاً لرسم منتظم بسيط من الدرجة *1* وغير تام.

ب – أعط مثالاً لرسم منتظم بسيط من الدرجة *2* وغير تام.

ج – أعط مثالاً لرسم منتظم بسيط من الدرجة *3* وغير تام.

١٤ – هل الرسم التام K_n منتظماً؟ وإذا كان ، فما هي درجته؟ برر إجابتك.

١٥ – أ – مثل الرسومات التامة ثنائية التجزئة $K_{4,5}$ ، $K_{3,3}$ ، $K_{2,2}$.

ب – صف الرسم المكمل للرسم $K_{n,m}$.

١٦ – وضح لماذا يكون الممر في أي رسم أيضاً طريقاً؟

١٧ – أ – هل يمكن أن تحتوي الدورة على حافة واحدة فقط؟

ب – هل يمكن أن تحتوي الدورة عل حافتين فقط؟   برر إجابتك في الحالتين.

قائمة

المراجع العلمية

REFERENCES

[١] بهاء فوزي أبو زيد (٢٠٠٤ م): "النخبة في الرياضيات". مركز ركن النخبة للنسخ والتصوير – المملكة العربية السعودية.

[٢] زياد عبد الكريم القاضي وآخرون (١٩٩٣ م): "الرياضيات". دار الفكر للنشر والتوزيع – عمان – الأردن.

[٣] سلسلة ملخصات شوم (١٩٩٩ م): "نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل". الدار الدولية للنشر والتوزيع – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٤] عبد القادر إبراهيم الدرويش (٢٠٠٧ م): "الرياضيات (التفاضل والتكامل)". كلية الملك عبد الله للدفاع الجوي – المملكة العربية السعودية.

[٥] عبد الله محمد الجوعي والسيد أنور السعيد (٢٠٠٤ م): "فصول في مبادئ الرياضيات". مكتبة الرشد – المملكة العربية السعودية.

[٦] عفاف محمد الجلال ومها قاسم الكجك (٢٠٠٦ م): "المرشد في التفاضل والتكامل". المملكة العربية السعودية.

[٧] فالح الدوسري (٢٠٠٧ م): "التفاضل والتكامل – الجزء الأول – الطبعة الأولى". المملكة العربية السعودية.

[٨] فالح الدوسري (١٩٩٨ م): "نظرية المجموعات". المملكة العربية السعودية.

[٩] قطب عبد الحميد محمود (١٩٩٨ م): "مقدمة إلى علوم الحاسب الآلي". جامعة طنطا – جمهورية مصر العربية.

[١٠] مجدي أمين كتبي ومروان أمين كتبي (١٩٩٩ م): "التعامل مع التفاضل والتكامل – الجزء الأول". المملكة العربية السعودية.

[١١] معروف سمحان وأحمد شراري (٢٠٠٥ م): "الرياضيات المتقطعة". دار الخريجي للنشر والتوزيع – المملكة العربية السعودية.

[١٢] معروف سمحان وفدوى سلامة (٢٠٠٠ م): "أسس الرياضيات". دار الخريجي للنشر والتوزيع – المملكة العربية السعودية.

[13] Steven Roman (1989): "An Introduction to Discrete Mathematics". Harcourt Brace Jovanovich, Publishers and its Subsidiary, Academic Press. U. S. A.

مبادئ الرياضيات

